

Alkusanat

Tämä kirja on suunniteltu käytettäväksi yliopistossa ensimmäisen vuoden analyysin opetuksessa, ja se kattaa kaikki ensimmäisen vuoden analyysin keskeiset asiat. Kirja on ollut saatavilla Unigrafian kautta vuosina 2014–2022. Tähän uuteen Gaudeamuksen julkaisemaan painokseen olemme tehneet lukuisia korjauksia, tarkennuksia ja lisäyksiä. Useimmat niistä perustuvat kollegoiltamme ja lukijoiltamme saamaamme palautteeseen. Kiitämme kaikkia kommenttien lähettäjiä.

Turussa ja Helsingissä 10.8.2023

Petteri Harjulehto, Riku Klén ja Mika Koskenoja

Sisällys

Alkusanat	1
Mihin analyysiä tarvitaan?	7
Lukiosta yliopistoon	9
Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä?	11
Kirjan rakenne	12
Luku 1. Reaaliluvut ja funktion määritelmä	15
1.1. Reaalilukujen kunta- ja järjestysaksioomat	15
1.2. Infimum, supremum ja täydellisyysaksiooma	18
1.3. Matemaattinen todistaminen ja induktio	23
1.4. Potenssi ja summamerkintä	25
1.5. Funktion määritelmä, injektio, surjektio ja bijektio	29
1.6. Trigonometrinen funktioiden geometrinen määritelmä	34
Osa 1. Raja-arvo	39
Luku 2. Lukujonon raja-arvo	41
2.1. Itseisarvo	41
2.2. Lukujonon raja-arvo	44
2.3. Monotoninen lukujono ja rajatta kasvaminen	49
2.4. Cauchyn yleinen suppenemisehto *	54
Luku 3. Funktion raja-arvo	57
3.1. Raja-arvon määritelmä ja perusominaisuudet	57
3.2. Toispuoleiset raja-arvot ja raja-arvo äärettömässä	63
3.3. Monotoninen funktio	67
Osa 2. Jatkuvuus ja derivoituvuus	71
Luku 4. Funktion jatkuvuus	73
4.1. Jatkuvuuden määritelmä	73
4.2. Bolzanon lause ja käänteisfunktion jatkuvuus	80
4.3. Funktion suurin ja pienin arvo	87
4.4. Tasainen jatkuvuus *	91
Luku 5. Funktion derivaatta	95
5.1. Derivaatan määritelmä	96
5.2. Funktioiden derivoituvuus ja ketjusääntö	102
5.3. Väliarvolause	109
5.4. Lipschitz-jatkuvuus *	116
5.5. Funktion ääriarvot	120
5.6. Konveksisuus ja korkeamman kertaluvun derivaatat *	122

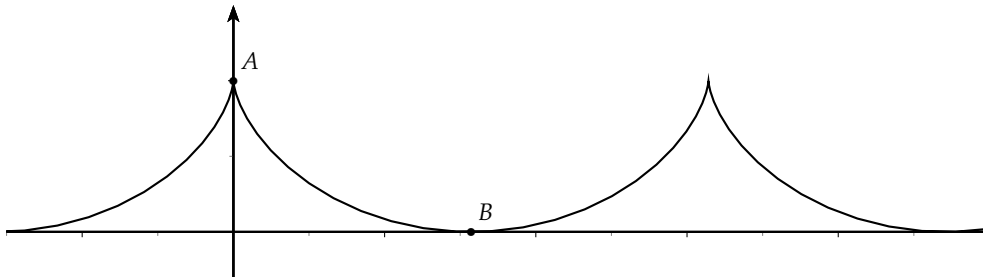
5.7. Newtonin–Raphsonin iteraatio *	131
Luku 6. Alkeisfunktiot	135
6.1. Irrationaaliluku eksponenttina	135
6.2. Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmifunktio	137
6.3. Yleiset eksponentti- ja potenssifunktiot	141
6.4. Arkusfunktiot *	145
6.5. l'Hôpitalin säännöt *	148
Osa 3. Integrointi	157
Luku 7. Riemannin integraali	159
7.1. Ala- ja yläsummat sekä integroituvuus	160
7.2. Riemannin integroituvuusehto	166
7.3. Porrasfunktiot *	169
7.4. Riemannin summat *	171
7.5. Riemannin integraalin perusominaisuuksia	177
Luku 8. Integraalifunktio	185
8.1. Integraalifunktion määritelmä	185
8.2. Riemannin integraalin ja integraalifunktion yhteys	189
8.3. Integraalilaskennan väliarvolause *	198
8.4. Polun pituus *	201
8.5. Logaritmifunktion määrittely integraalin avulla *	206
Luku 9. Integroimistekniikoita	209
9.1. Integroiminen sijoituksen avulla	209
9.2. Osittaisintegrointi	212
9.3. Rationaalifunktioiden integrointi	214
Luku 10. Epäoleellinen integraali	221
10.1. Epäoleellisen integraalin määritelmä (tyypit I ja II)	221
10.2. Epäoleellisen integraalin ominaisuuksia	228
10.3. Ei-negatiivisen funktion epäoleellinen integraali	236
10.4. Integraalin itseinen suppeneminen	242
Osa 4. Funktiojonot ja funktioiden approksimointi	247
Luku 11. Funktiojonon tasainen suppeneminen	249
11.1. Rajafunktion jatkuvuus	249
11.2. Rajafunktion integroituvuus ja derivoituvuus	253
Luku 12. Taylorin ja Maclaurinin polynomit	261
12.1. Taylorin kaava	262
12.2. Yksikäsitteisyys	271
12.3. Sovelluksia	273
Osa 5. Sarjat	279
Luku 13. Sarjan suppeneminen	281
13.1. Suppenemisen määritelmä ja geometrinen sarja	281
13.2. Perustuloksia	287

13.3. Majorantti- ja minoranttiperiaate sekä p -sarjat	292
13.4. Muita suppenemistestejä sarjoille *	296
Luku 14. Vuorottelevat ja manipuloidut sarjat	301
14.1. Vuorottelevat sarjat ja itseinen suppeneminen	301
14.2. Termien ryhmittely ja ehdollinen suppeneminen *	306
14.3. Termien uudelleenjärjestäminen *	312
Luku 15. Potenssisarjat	317
15.1. Potenssisarjan määritelmä ja Abelin lause	317
15.2. Suppenemissäteen määrääminen	322
15.3. Sarjan tasainen suppeneminen	326
15.4. Taylorin sarja	332
15.5. Trigonometrinen funktioiden analyttinen määritelmä *	337
Liite A. Joukko-opin merkintöjä	342
Liite B. Arkhimedeiden lause ja rationaalilukujen tiheys	344
Liite C. Reaalilukujen jonokonstruktio	347
Liite D. Lukujen π ja e irrationaalisuus	353
Liite E. Jatkuva ei-missään derivoituva funktio	355
Liite F. Binomisarja	358
Kirjallisuutta	362
Hakemisto	364
Matemaattisia merkintöjä	368

Mihin analyysiä tarvitaan?

Tämä kirja käsittelee analyysin perusteita ja tarkemmin reaalianalyysin perusteita reaalityyppisillä. Mutta miksi analyysi on tärkeää ja mihin sitä tarvitaan? Useimmat analyysin sovellukset käyttävät differentiaaliyhtälöitä tai niihin läheisesti liittyvää variaatiolaskentaa. Näiden avulla voidaan mallintaa luonnonilmiöitä, kuten lämmön etenemistä, jäätikön liikkeitä tai eläinpopulaation kokoa, mutta niitä voidaan käyttää myös mm. kuvankäsittelyssä. Tutustutaan analyysin sovelluksiin muutamien esimerkkien avulla.

Ajatellaan, että meillä on eri korkeudella olevat pisteet A ja B , jotka eivät ole päällekkäin. Haluamme rakentaa liukumäen, jota pitkin kuula vierii mahdollisimman nopeasti ylemmästä pisteestä A alempaan pisteeseen B , katso Kuva 1. Jana AB tuottaa tietysti lyhyimmän liukumäen, mutta sitä pitkin kuula ei vieri lyhyimmässä ajassa. Kysymyksen kuulan nopeimmasta vierimisradasta esitti Johann Bernoulli aikalaisilleen vuonna 1696. Bernoullin lisäksi kysymyksen ratkaisivat hänen vanhempi veljensä Jakob Bernoulli, Isaac Newton ja Guillaume de l'Hôpital. Vastaus on sykloidin kaari, jolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Jakob Bernoullin syvälinen ratkaisu muodosti alun matemaattisen analyysin uudelle haaralle, variaatiolaskennalle, joka on nykYTEKNOLOGIAN kannalta hyvin keskeinen analyysin haara.



KUVA 1. Sykloidin kaarta pitkin kuula vierii nopeimmin pisteestä A pisteeseen B .

Mekaniikan II peruslain mukaan kappaleeseen vaikuttavien voimien summa on yhtä suuri kuin kappaleen massa kerrottuna sen kiihtyvyydellä, $F = ma$. Tällöin kappaleen paikka $x(t)$ ajan t funktiona toteuttaa ehdon

$$mx''(t) = F(t),$$

jossa x'' on funktion x toinen derivaatta. Yksinkertaisissa tilanteissa, kuten vaikka pudotettaessa esine, paikka voi olla reaalityyppinen, mutta yhtälön voi laajentaa myös niin, että paikka on kolmiulotteisen koordinaatiston piste.

Tarkastellaan bakteeripopulaatiota yksinkertaisessa tilanteessa, jossa on tarjolla runsaasti ravintoa eikä bakteereilla ole saalistajia. Kun rajoitetaan tarkastelu lyhyeen ajanjaksoon suhteessa yksittäisen bakteerin elinikään, ainoa populaation kokoon vaikuttava tekijä on uusien bakteerien syntyminen. Tällöin on

järkevää olettaa, että bakteerikannan kasvun nopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon P ajanhetkellä t eli

$$P'(t) = kP(t), \quad t > 0,$$

missä k on syntyvyyttä kuvaava reaalinen vakio. Tällaista yhtälöä sanotaan tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi, sillä se esittää tuntemattoman yhden muuttujan funktion P ja sen derivaatan välistä yhteyttä. Jos populaation alkukoko P_0 tunnetaan, niin yhtälöön voidaan liittää alkuehto $P(0) = P_0$. Tällöin differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan

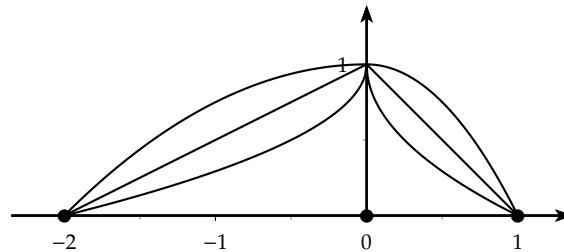
$$P(t) = P_0 e^{kt}, \quad t \geq 0.$$

Populaation kasvu (kun $k > 0$) on siis eksponentiaalista, ja mallia kutsutaankin eksponentiaalisiksi kasvumalliksi.

Ajatellaan, että olemme suunnitelleet uudenlaisen kondensaattorin ja haluamme tietää sen kapasitanssin. Ajatellaan yksinkertaisuuden takia, että kondensaattorimme on yksiulotteinen ja se koostuu pisteistä $-2, 0$ ja 1 , katso Kuva 2. Saamme kapasitanssin selville tutkimalla funktioita u , joille $u(0) = 1$, $u(-2) = 0 = u(1)$ ja jotka ovat derivoituvia väleillä $(-2, 0)$ ja $(0, 1)$. Kapasitanssi on lausekkeen

$$\int_{-2}^0 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 |u'(x)|^2 dx$$

pienin arvo, kun u on yllä määritelty derivoituva funktio. Vaikka yksiulotteisia kondensaattoreita ei voi olla olemassa, niin yllä kuvatun minimointiongelman muuttaminen kolmiulotteiseksi johtaa todellisen tilanteen mallintamiseen ja oikean kondensaattorin kapasitanssin ratkaisemiseen.



KUVA 2. Kondensaattorin kapasitanssin laskeminen: pisteet $-2, 0$ ja 1 sekä ehdokasfunktioita.

Analyysiä sovelletaan myös lääketieteelliseen kuvantamiseen kuten röntgeeniin, tietokonetomografiaan tai positroniemissiotomografiaan (PET). Kuvauksen aikana suoritetaan useita mittauksia, joiden perusteella muodostetaan kuva. Kuvan muodostaminen eli rekonstruktio tapahtuu teoriassa laskemalla integraalien arvoja mitatuista arvoista. Integraalit lasketaan niin kutsuttujen projiosuorien suuntaisesti. Käytännössä integraalien laskemisen lisäksi laskennassa tehdään useita korjauksia liittyen fysikaalisiin ilmiöihin.

Elektroreologiset nesteet ovat ryhmä nesteitä, joiden viskositeetti eli virtausvastus riippuu siitä, onko neste sähkökentässä vai ei. Nämä nesteet ovat esimerkki älykkäistä materiaaleista, joiden tutkimus on tällä hetkellä aktiivista niin matematiikassa kuin insinöörityieteissäkin. Näidenkin nesteiden virtausta

voidaan mallintaa sopivilla osittaisdifferentiaaliyhtälöillä. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ja niiden ratkaisujen ymmärtämiseksi tarvitaan ainakin jatkuvuuden, derivaatan ja integraalin käsitteitä. Kaikkia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ei osata ratkaista, joten niiden ratkaisu joudutaan selvittämään numeerisesti. Tässä kirjassa esiteltävät Taylorin polynomit ovat keskeinen lähtökohta numeerisissa menetelmissä.

Lukiosta yliopistoon

Lukion matematiikassa opitaan differentiaalilaskentaa. Tulokset annetaan valmiina laskusääntöinä ilman täsmällistä perustelua. Tässä kirjassa käydään perusteellisesti läpi näiden tulosten teoria. Seuraavissa esimerkeissä tarkastellaan ylioppilaskokeen matematiikan tehtäviä ja niiden ratkaisuihin liittyvää teoriaa.

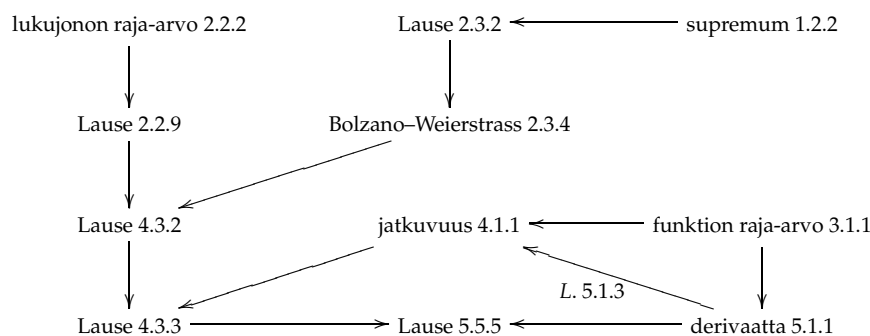
ESIMERKKI 1 (Yo pitkä matematiikka, syksy 2012, tehtävä 5): Määritä polynomien $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ suurin ja pienin arvo välillä $[2, 6]$.

RATKAISU. Polynomien $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$ derivaatta on $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$. Derivaatan nollakohdat saamme toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta. Ne ovat

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4315}}{6} = \frac{12 \pm 18}{6} = \begin{cases} 5, \\ -1. \end{cases}$$

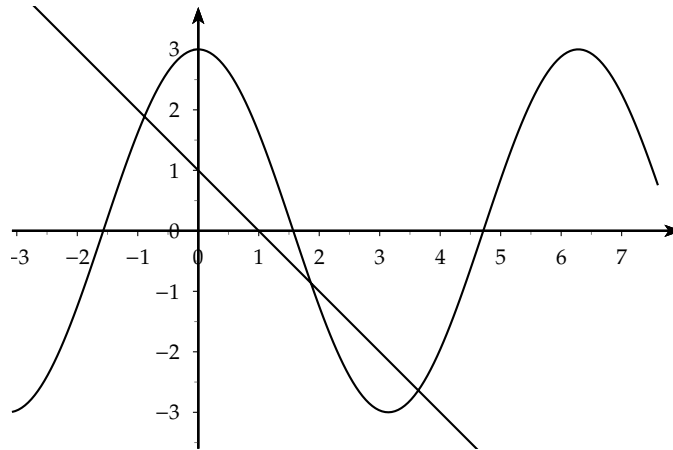
Näistä vain 5 kuuluu tutkittavalle välille $[2, 6]$. Koska $f(2) = -44$, $f(5) = -98$ ja $f(6) = -88$, antaa $f(2)$ suurimman ja $f(5)$ pienimmän arvon. Suurin arvo on siis -44 ja pienin -98 . \triangle

Edellä esitetty ratkaisu perustuu lukiossa opittuun sääntöön, jonka mukaan suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa. Tässä kirjassa tämä sääntö on Lause 5.5.5. *Miten Lause 5.5.5 todistetaan?* Meidän on ainakin osattava derivoida ja ymmärrettävä jatkuvuus, mutta tämä ei riitä. Lisäksi tarvitsemme lukujonon ja funktion raja-arvot ja Bolzanon–Weierstrassin lauseen. Kuvasta 3 selviää näiden määritelmien ja tulosten suhde käytettyyn lauseeseen.



KUVA 3. Suljetulla välillä derivoituvan funktion suurin ja pienin arvo (Lause 5.5.5).

ESIMERKKI 2 (Yo pitkä matematiikka, kevät 2012, tehtävä 13): Funktioiden $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3 \cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.



Kuva 4. Funktiot $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3 \cos x$.

RATKAISU. Funktioiden f ja g kuvaajat ovat Kuvassa 4. Määritellään funktio $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $h(x) = f(x) - g(x) = 1 - x - 3 \cos x$. Tällöin funktio h on jatkuva joukossa \mathbb{R} .

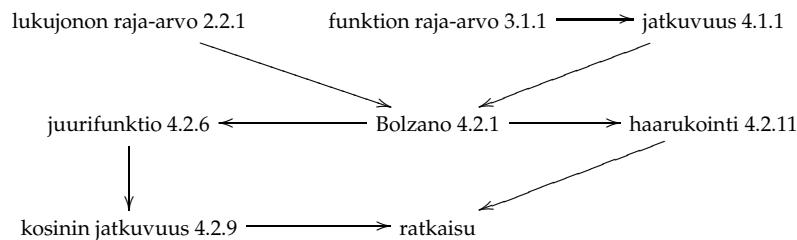
Koska $h(-0,885) < -0,014$, $h(-0,89) > 0,0017$ ja h on jatkuva, on funktiolla h nollakohta välillä $(-0,885; -0,89)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on siis $-0,89$.

Koska $h(1,86) < -0,0044$, $h(1,865) > 0,0049$ ja h on jatkuva, on funktiolla h toinen nollakohta välillä $(1,86; 1,865)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $1,86$.

Koska $h(3,635) > 0,0071$, $h(3,64) < -0,0049$ ja h on jatkuva, on funktiolla h kolmas nollakohta välillä $(3,635; 3,64)$. Nollakohdan kaksidesimaalinen likiarvo on $3,64$.

Leikkauspisteiden y -koordinaatit ovat $f(-0,89) = 1,89$, $f(1,86) = -0,86$ ja $f(3,64) = -2,64$. Leikkauspisteet ovat siis $(-0,89; 1,89)$, $(1,86; -0,86)$ ja $(3,64; -2,64)$.

△



Kuva 5. Bolzanon lause ja haarukointi.

Tässä esimerkissä numeeriseksi menetelmäksi on valittu haarukointi eli Bolzanon lauseen soveltaminen. *Mistä tiedämme, että haarukointi toimii kaikille jatkuville funktioille? Mistä tiedämme, että tehtävään funktiot ovat jatkuvia?* Tai tarkemmin, mistä tiedämme, että kosini on jatkuva? Voidaksemme todistaa, että haarukointi toimii, tarvitsemme lukujonon raja-arvon, funktion raja-arvon, funktion jatkuvuuden ja Bolzanon lauseen. Kosinin jatkuvuuteen tarvitaan samat käsitteet. Ne ovat Kuvassa 5.

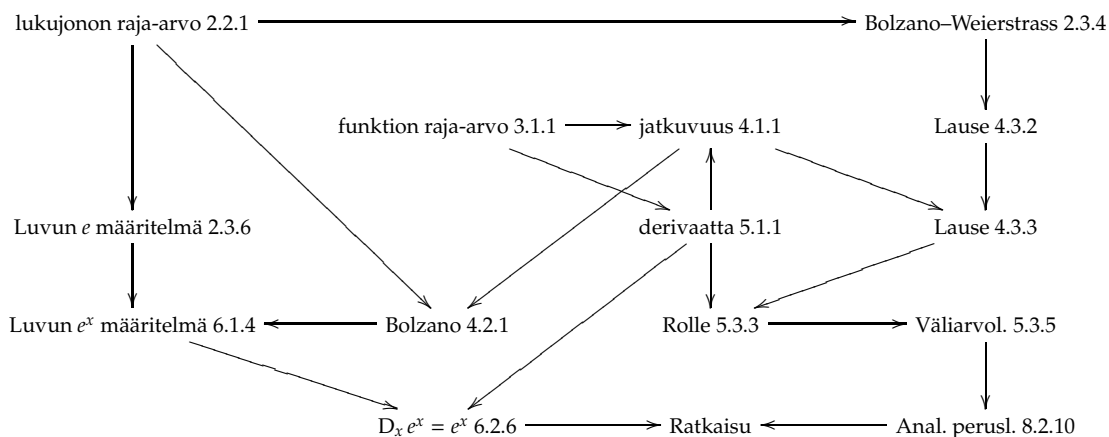
ESIMERKKI 3 (Yo pitkä matematiikka, kevät 2010, tehtävä 2a): Laske integraali

$$\int_0^1 e^x + 1 dx.$$

RATKAISU.

$$\int_0^1 e^x + 1 dx = e^1 + 1 - (e^0 + 0) = e. \quad \triangle$$

Näennäisestä helppoudesta huolimatta tämän tehtävän takana on erittäin syvällisiä tuloksia. *Miten Neperin luku e määritellään? Kuinka määritellään Neperin luku korotettuna irrationaalilukupotenssiin? Millaiset funktiot ovat integroituvia? Miten integraalin arvo saadaan selville? Integraalien laskemiseen tarvitaan merkittävä osa tämän kirjan sisältämästä teoriasta. Käsitteet löytyvät Kuvasta 6.*



KUVA 6. Miten saadaan $\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0$?

Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä?

Mihin tarvitaan tarkkoja määritelmiä? Erityisesti mihin tarvitaan raja-arvon (ε, δ) -määritelmää? Mitä vikaa lukiossa esitettyssä määritelmässä on? Lukiossa raja-arvo ja sitä kautta funktion jatkuvuus määritellään usein graafisen tulkinnan kautta. Monissa helpoissa tilanteissa tämä on riittävää. Kaikkia ilmiöitä ei kuitenkaan saada esille ilman täsmällisiä määritelmiä. Ajatellaan esimerkiksi funktiota

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x > 0, \\ c, & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$$

Kun $c = 0$, niin funktio on jatkuva. Jos sen sijaan luku c on hyvin lähellä nollaa, vaikka $c = 10^{-10}$, niin kuvaajasta on vaikea tehdä johtopäätöstä jatkuvuudesta. Ongelma ei välttämättä ratkea katsomalla kuvaa oikeassa mittakaavassa. Kuvasta on esimerkiksi vaikea sanoa, onko funktiolla $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ ja $f(x) = \sin(1/x)$, kun $x \neq 0$, raja-arvoa origossa (eli pisteessä $x = 0$), tai kuvaajasta on vaikea huomata, että funktio $f: (10, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$, on (aidosti) kasvava ja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Jatkuvuuden määrittely graafisen tulkinnan kautta saattaa aiheuttaa väärinkäsityksiä, jos funktio ei ole määritelty kaikilla reaaliluvuilla. Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{x}$ on määritelty kaikilla muilla reaaliluvuilla paitsi silloin, kun $x = 0$. Funktio on jatkuva määrittelyjoukossaan, vaikka lukion jatkuvuuden perusteella sen voisi ajatella epäjatkuvaksi.

Tässä kirjassa esitetyistä määritelmistä ainakin tasainen jatkuvuus (Määritelmä 4.4.1) ja tasainen suppeneminen (Määritelmä 11.1.2) edellyttävät täsmällistä (ε, δ) -määritelmää. Tasaisesta jatkuvuudesta seuraa esimerkiksi, että suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva (Lause 7.2.3). Tasaisesta suppenemisestä seuraa esimerkiksi, että jatkuvista funktioista koostuvan funktiojonon rajafunktio on jatkuva (Lause 11.1.6) tai että potenssisarja voidaan integroida ja derivoida termeittäin (Korollaarit 15.3.11 ja 15.3.14).

Kirjan rakenne

Olemme suunnitelleet tämän kirjan yliopistoon matematiikan ensimmäisen vuoden pääaineopiskelijoiden analyysin kursseille. Kirjan osat 1 ja 2 kattavat syksyn kurssin ja osat 3, 4 ja 5 kevään kurssin. Kirjoittajien mielestä keskeisimmät lauseet on ladottu reunallisen tummennetun laatikon sisään. Tähdellä merkityt luvut laajentavat aihepiirin tietämystä ja ne voidaan jättää väliin kokonaisuuden siitä kärsimättä. Lisäksi liitteisiin on koottu sekä valmistettavaa materiaalia että teoriaa laajentavaa materiaalia. Kirjassa olevat historialliset tiedot on koottu eri lähteistä, kuitenkin etupäässä lähteistä [6, 16], eikä niitä ole tarkistettu. Näiden historiallisten tietojen osalta tätä kirjaa ei saa käyttää lähteenä.

Kirja alkaa Luvulla 1, jossa esitellään reaalilukujen aksioomat sekä funktion määritelmä. Osa 1 käsittelee raja-arvoa. Luvussa 2 käsitellään lukujonon raja-arvoa ja Luvussa 3 funktion raja-arvoa. Meidän mielestämme lukujonon raja-arvo kannattaa käsitellä ennen funktion raja-arvoa, koska näin opiskelijat pääsevät harjoittelemaan haastavaa (ε, δ) -määritelmää ensin helpommassa lukujonon tapauksessa.

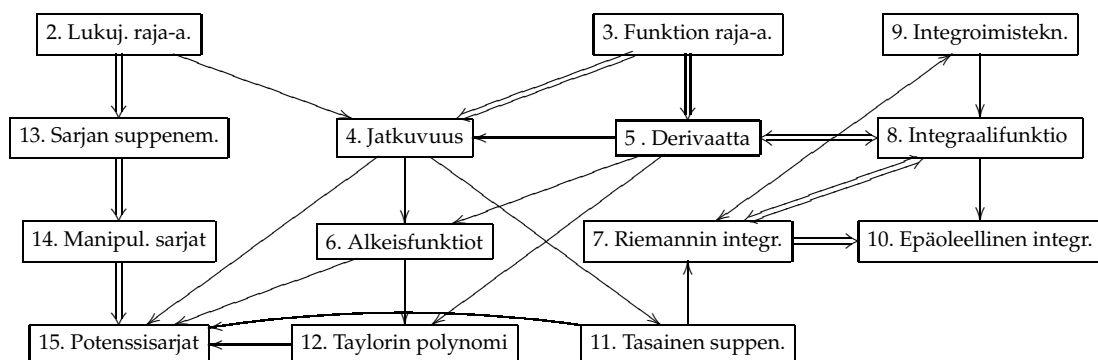
Osa 2 alkaa funktion jatkuvuudella (Luku 4) ja siirtyy sitten derivoituvuuteen (Luku 5). Nämä luvut muodostavat tiiviin ja tärkeän kokonaisuuden. Luvussa 6 kerrotaan, miten potenssin eksponentiksi voidaan laittaa rationaalilukujen lisäksi myös irrationaalilukuja.

Osa 3 käsittelee Riemannin integroituvuutta. Luvussa 7 määritellään Riemannin integraali rajoitetuille funktioille ala- ja yläsummien avulla. Luvussa 8 tutkitaan Riemannin integraalin ja derivaatan välisiä yhteyksiä tutustumalla integraalifunktioon. Luvussa 9 tutustutaan erilaisiin integraalin laskemisen tekniikoihin. Luvussa 10 Riemannin integraalin määritelmä laajennetaan rajoittamattomille väleille ja rajoittamattomille funktioille.

Osassa 4 käsitellään funktiojonoja ja hankalien funktioiden arviointia helpompien funktioiden avulla. Luvussa 11 esitellään tasaisen suppenemisen käsite. Tasainen suppeneminen on hyödyllinen, koska siinä jatkuvuus ja integroituvuus periytyvät rajafunktiolle. Luvussa 12 tutustutaan funktion arviointiin Taylorin ja Maclaurinin polynomeilla, jotka ovat sovelletun matematiikan perustyökaluja.

Viimeisessä osassa 5 käsitellään sarjoja. Luvussa 13 tutkitaan sarjojen suppenemistä. Luvussa 14 tutustutaan vuorotteleviin sarjoihin sekä sarjan termien

ryhmittelyyn ja uudelleenjärjestämiseen. Viimeisessä luvussa 15 käsitellään potenssisarjoja ja laajennetaan Taylorin polynomit sarjoiksi.



Kirjan lukujen väliset merkittävimmät riippuvuudet. Yksinkertainen nuoli kuvaa riippuvuutta ja kaksinkertainen vahvaa riippuvuutta.

LUKU 1

Reaaliluvut ja funktion määritelmä

Tässä luvussa käsittelemme reaalilukujen ja funktioiden perusominaisuuksia. Luvun asiat eivät muodosta kokonaisuutta vaan antavat tarpeellisen teoreettisen pohjan Osien 1–4 asioihin. Luvussa 1.1 määrittelemme reaaliluvut aksiomaattisesti. Erityisen keskeistä täydellisyysaksiomaa käsitellään Luvussa 1.2. Luvussa 1.3 esittelemme induktion, jota Luvussa 1.4 sovellamme potenssiäpäyhtälöihin. Luvussa 1.5 määrittelemme funktion ja tutkimme sen ominaisuuksia. Viimeisessä luvussa, Luvussa 1.6, annamme trigonometrisille funktioille geometrisen määritelmän.

1.1. Reaalilukujen kunta- ja järjestysaksiomat

Analyysi perustuu reaalilukujen teoriaan. Ennen varsinaiseen analyysiin siirtymistä esitämme reaalilukujen aksiomat, joista kaikki reaalilukujen ominaisuudet voidaan johtaa. Tässä luvussa esitetyt reaalilukujen ominaisuudet ovat lukiosta tuttuja, joten halutessaan tämän luvun voi jättää väliin ja palata siihen algebran opintojen yhteydessä.

Merkitsemme reaalilukujen joukkoa \mathbb{R} , joka tarkoittaa siis kaikkia reaalilukuja. Tässä kirjassa emme esitele joukon yleistä määritelmää, vaan ajattelemme joukon koostuvan kokoelmasta alkioita. Yleiseen joukkoon liittyviä merkintöjä on esitelty liitteessä A.

Reaalilukujen joukko \mathbb{R} on algebrallisilta ominaisuuksiltaan *kunta*, jossa on määritelty kaksi laskutoimitusta, *yhteenlasku* $+$ ja *kertolasku* \cdot . Kahden reaaliluvun $x, y \in \mathbb{R}$ *summa* on $x + y \in \mathbb{R}$ ja *tulo* on $x \cdot y \in \mathbb{R}$. Tulossa kertomerkki jätetään yleensä kirjoittamatta ja merkitään xy .

Kunta-aksiomat:

- (K1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (yhteenlaskun vaihdannaisuus).
- (K2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (yhteenlaskun liitännäisyys).
- (K3) On olemassa sellainen reaaliluku 0 , että $x + 0 = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (nolla-alkio).
- (K4) Jokaista reaalilukua $x \in \mathbb{R}$ vastaa reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ siten, että $x + y = 0$. Tällöin merkitään $y = -x$ (vastaluku).
- (K5) $xy = yx$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ (kertolaskun vaihdannaisuus).
- (K6) $(xy)z = x(yz)$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (kertolaskun liitännäisyys).
- (K7) $x(y + z) = xy + xz$ kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}$ (osittelulaki).
- (K8) On olemassa sellainen reaaliluku 1 , että $1 \cdot x = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ (ykkös-alkio).
- (K9) Jokaista reaalilukua $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, vastaa reaaliluku $y \in \mathbb{R}$ siten, että $xy = 1$. Tällöin merkitään $y = \frac{1}{x}$ tai $y = x^{-1}$ (käänteisluku).

Tässä kirjassa ymmärrämme luonnolliset luvut $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$, kokonaisluvut \mathbb{Z} ja rationaaliluvut \mathbb{Q} reaalilukujen osajoukkoina. Luonnolliset luvut

määrittelemme ykkösalkion avulla: $1 \in \mathbb{N}_1$ ja jos $n \in \mathbb{N}_1$, niin $n + 1 \in \mathbb{N}_1$. Kokonaisluvut \mathbb{Z} saamme luonnollisista luvuista lisäämällä joukkoon \mathbb{N}_1 nolla-alkion 0 ja jokaisen luonnollisen luvun vastaluvun eli joukon $\{-x : x \in \mathbb{N}_1\}$. Rationaaliluvut \mathbb{Q} saamme kokonaisluvuista asettamalla

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Lisäksi joukolle $\{0\} \cup \mathbb{N}_1$ käytämme merkintää \mathbb{N}_0 ja joukon $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alkioita kutsumme irrationaaliluvuiksi.

Kunta-aksioomista seuraa useita tärkeitä reaalilukujen ominaisuuksia. Ensimmäiset niistä koskevat nolla- ja ykkösalkion sekä vasta- ja käänteisluvun yksikäsitteisyyttä.

LAUSE 1.1.1: *Reaalilukujen joukossa on yksi nolla-alkio 0 ja yksi ykkösalkio 1.*

TODISTUS. Olkoon $0' \in \mathbb{R}$ luku, jolla $x + 0' = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = 0$ saamme $0 + 0' = 0$. Jos taas aksioomassa (K3) valitaan $x = 0'$, niin saamme $0' + 0 = 0'$. Koska reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuuden eli aksiooman (K1) mukaan $0 + 0' = 0' + 0$, niin $0' = 0$. Näin ollen reaalilukujen joukossa on vain yksi nolla-alkio 0. Huomaa, että aksiooma (K3) takaa nolla-alkion 0 olemassaolon.

Vastaavasti voidaan osoittaa ykkösalkion 1 yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.5). \square

Seuraavan tuloksen mukaan reaalilukujen summa ja tulo (silloin kun kumpikaan tulon tekijä ei ole 0) ovat yksikäsitteisiä.

LAUSE 1.1.2: *Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Jos $x + y = x + z$, niin $y = z$. Vastaavasti, jos $x \neq 0$ ja $xy = xz$, niin $y = z$.*

TODISTUS. Olkoon $x + y = x + z$. Tällöin aksioomien (K1), (K2), (K3) ja (K4) mukaan

$$\begin{aligned} y &= y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) \\ &= (x + z) + (-x) = (z + x) + (-x) = z + (x + (-x)) = z + 0 = z. \end{aligned}$$

Vastaavasti voidaan osoittaa tulon yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.6). \square

LAUSE 1.1.3: *Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. Yhtälöllä $a + x = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$, jota merkitään $b - a$ ja kutsutaan lukujen b ja a erotukseksi. Vastaavasti, jos $a \neq 0$, niin yhtälöllä $ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$, jota merkitään $\frac{b}{a}$ tai b/a ja kutsutaan lukujen b ja a osamääräksi.*

TODISTUS. Huomataan, että $x = (-a) + b \in \mathbb{R}$ on yhtälön ratkaisu, sillä aksioomia (K1), (K2), (K3) ja (K4) käyttäen saadaan

$$a + x = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b.$$

Jos $y \in \mathbb{R}$ on yhtälön $a + x = b$ toinen ratkaisu, niin $a + x = b = a + y$, joten Lauseen 1.1.2 mukaan $x = y$.

Vastaavasti voidaan osoittaa yhtälön $ax = b$ ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys (Tehtävä 1.1.7). \square

Muita tuttuja reaalilukujen algebrallisia ominaisuuksia on tehtävissä 1.1.8–1.1.12.

Kunnan struktuuriin liittyvien algebrallisten ominaisuuksien lisäksi reaaliluvuilta vaaditaan, että ne voidaan asettaa järjestykseen, jolloin reaalilukujen joukko \mathbb{R} muodostaa *järjestetyn* kunnan. Järjestysominaisuus on myös luonnollisilla luvuilla, kokonaisluvuilla, rationaaliluvuilla ja irrationaaliluvuilla, jotka ovat reaalilukujen joukon osajoukkoja, mutta esimerkiksi kompleksilukuja ei voida asettaa järjestykseen.

Järjestysaksiomat: Reaalilukujen *järjestysrelaatiolla* $<$ on seuraavat ominaisuudet:

- (J1) Jos $x, y \in \mathbb{R}$, niin ehdoista $x < y$, $x = y$ ja $x > y$ on voimassa täsmälleen yksi. (Merkintä $x > y$ tarkoittaa samaa kuin $y < x$.)
- (J2) Jos $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$ (transitiivisuus).
- (J3) Jos $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ ja $y > 0$, niin $xy > 0$.
- (J4) Jos $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja $x < y$, niin $x + z < y + z$.

Reaalilukujen järjestyksen ja suuruusvertailun yhteydessä käytetään yleisesti seuraavia merkintöjä:

- (m1) $x \leq y$, jos $x < y$ tai $x = y$.
- (m2) $x \neq y$, jos $x < y$ tai $x > y$.
- (m3) $x \geq y$, jos $x > y$ tai $x = y$.

Samoin seuraavia ilmaisuja käytetään yleisesti:

- (i1) Jos $x > 0$, niin sanotaan, että x on *positiivinen*.
- (i2) Jos $x < 0$, niin sanotaan, että x on *negatiivinen*.
- (i3) Jos $x \geq 0$, niin sanotaan, että x on *ei-negatiivinen*.
- (i4) Jos $x \leq 0$, niin sanotaan, että x on *ei-positiivinen*.

Reaalilukuvälejä merkitsemme seuraavasti, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: (a, b) on avoin väli $\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$, $[a, b]$ on suljettu väli $\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$, $(a, b]$ on puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$ ja $[a, b)$ on puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$.

LAUSE 1.1.4: Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin $x = y$, jos ja vain jos $x \leq y$ ja $x \geq y$.

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $x = y$. Tällöin merkintöjen (m1) ja (m3) perusteella $x \leq y$ ja $x \geq y$.

Oletetaan sitten, että $x \leq y$ ja $x \geq y$. Tehdään vastaoletus, että $x \neq y$. Koska $x \leq y$ ja $x \geq y$, niin merkintöjen (m1) ja (m3) mukaan $x < y$ ja $x > y$ ovat nyt voimassa samanaikaisesti. Tämä on ristiriita aksioman (J1) kanssa. Siis $x = y$. \square

Joitakin muita tuttuja reaalilukujen järjestyksen ominaisuuksia on tehtävissä 1.1.13–1.1.16.

Reaalilukujen joukon yksikäsitteiseen karakterisointiin eivät vielä riitä kunta- ja järjestysaksiomat, sillä esimerkiksi rationaalilukujen joukko toteuttaa ne kaikki. Sen vuoksi reaalilukujen aksiomajärjestelmää on täydennettävä seuraavassa luvussa esitettävällä täydellisyysaksiomalla.

Tehtäviä lukuun 1.1.

1.1.5: Osoita, että reaalilukujen joukossa on vain yksi ykkösalkio 1.

1.1.6: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$. Osoita, että jos $xy = xz$, niin $y = z$.

1.1.7: Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Osoita, että yhtälöllä $ax = b$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \in \mathbb{R}$.

1.1.8: Osoita, että $0 \cdot x = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1.1.9: Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $xy = 0$, niin ainakin toinen luvuista x ja y on 0.

1.1.10: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Osoita, että

(a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$,

(b) $x(y - z) = xy - xz$,

(c) $(-x)(-y) = xy$.

1.1.11: Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $b, d \neq 0$. Osoita, että

(a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, jos ja vain jos $ad = bc$,

(b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$,

(c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

1.1.12: Osoita, että jos $a \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$, niin $(-1) \cdot a = -a$ ja $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$.

1.1.13: Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sekä $a < b$ ja $c < d$. Osoita, että $a + c < b + d$. Jos lisäksi a, b, c, d ovat positiivisia, niin osoita, että $ac < bd$ ja $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

1.1.14: Olkoot $x, y, z \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $x < y$ ja $z > 0$, niin $zx < zy$.

1.1.15: Osoita, että jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x > 0$, niin $-x < 0$ ja $x^{-1} = \frac{1}{x} > 0$.

1.1.16: Osoita, että $0 < 1$.

1.1.17: Olkoot $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. Infimum, supremum ja täydellisyysaksioma

Tässä luvussa käsittelemme reaalilukujoukkojen ylä- ja alarajoja. Erityisesti olemme kiinnostuneita pienimmästä ylärajasta supremumista ja suurimmasta alarajasta infimumista. Nämä käsitteet ovat keskeisiä tässä kirjassa esiteltävässä asiassa.

MÄÄRITELMÄ 1.2.1: Olkoon E reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä osajoukko. Jos on olemassa sellainen $s \in \mathbb{R}$, että $x \leq s$ kaikilla $x \in E$, niin lukua s sanotaan joukon E *yläraajaksi* ja joukkoa E sanotaan *ylhäältä rajoitetuksi*. Vastaavasti, jos on olemassa sellainen $p \in \mathbb{R}$, että $x \geq p$ kaikilla $x \in E$, niin lukua p sanotaan joukon E *alarajaksi* ja joukkoa E sanotaan *alhaalta rajoitetuksi*.

Huomaa, että joukon yläraja ja alaraja eivät ole yksikäsitteisiä. Jos s on joukon E yläraja, niin tällöin myös $s+1, s+2, s+3, \dots$ ovat joukon E ylärajoja. Esimerkiksi 0 ja 1 ovat joukon $(1, 2]$ alarajoja sekä 2 ja 3 ovat sen ylärajoja.

MÄÄRITELMÄ 1.2.2: Jos E on reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko ja jos s on joukon E yläraja, joka toteuttaa epäyhtälön $s \leq x$ kaikilla joukon E ylärajoilla x , niin s on joukon E *supremum* eli pienin yläraja. Tällöin merkitään $s = \sup E$. Jos joukko E ei ole ylhäältä rajoitettu, niin merkitään $\sup E = \infty$.

Vastaavalla tavalla määritellään infimum eli suurin alaraja.

MÄÄRITELMÄ 1.2.3: Jos E on reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko ja jos p on joukon E alaraja, joka toteuttaa epäyhtälön $p \geq x$ kaikilla joukon E alarajoilla x , niin p on joukon E *infimum* eli suurin alaraja. Tällöin merkitään $p = \inf E$. Jos joukko E ei ole alhaalta rajoitettu, niin merkitään $\inf E = -\infty$.

Luku $s \in E$ on joukon E suurin luku, jos $x \leq s$ kaikilla $x \in E$ ja silloin merkitsemme $s = \max E$. Vastaavasti luku $p \in E$ on joukon E pienin luku, jos $x \geq p$ kaikilla $p \in E$ ja silloin merkitsemme $p = \min E$. Seuraavaksi todistamme, että jos joukossa on suurin luku, niin se on joukon supremum, ja jos joukossa on pienin luku, niin se on joukon infimum. Huomaa kuitenkin, että joukossa ei välttämättä ole suurinta tai pienintä lukua, kuten esimerkiksi joukossa $(0, 1)$.

LAUSE 1.2.4:

- (a) Olkoon E reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko. Jos joukossa E on suurin luku s , niin $s = \sup E$.
- (b) Olkoon E reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko. Jos joukossa E on pienin luku p , niin $p = \inf E$.

TODISTUS. (a) Suurin luku s on joukon E yläraja, koska kaikilla $x \in E$ pätee $x \leq s$. Koska s on yläraja, niin $\sup E \leq s$. Koska $s \in E$, niin supremumin määritelmän nojalla $s \leq \sup E$. Näin ollen $s = \sup E$.

(b) Todistus on samankaltainen kuin kohdan (a) todistus. □

Seuraavaksi esitämme reaalilukujen viimeisen aksiooman eli täydellisyysaksiooman, joka erottaa reaaliluvut oleellisesti rationaaliluvuista.

Täydellisyysaksiooma: Ylhäältä rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on aina supremum, joka on reaaliluku.

Täydellisyysaksioomasta seuraa, että alhaalta rajoitetulla epätyhjällä reaalilukujen osajoukolla on aina infimum.

LAUSE 1.2.5: Olkoon E alhaalta rajoitettu epätyhjä reaalilukujen osajoukko. Tällöin joukon E infimum on reaaliluku.

TODISTUS. Olkoon c joukon E eräs alaraja. Merkitään

$$F = \{-x : x \in E\}.$$

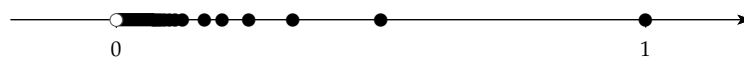
Tällöin joukko F on ylhäältä rajoitettu, koska $x \geq c$ kaikilla $x \in E$ antaa $-x \leq -c$ kaikilla $x \in E$. Täydellisyysaksiooman nojalla joukolla F on supremum $s \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $x \in E$ pätee $-x \leq s \leq -c$, josta saamme $x \geq -s \geq c$ kaikilla $x \in E$. Luku $-s$ on siis joukon E suurin alaraja eli infimum. \square

Huomaa, että rationaaliluvuilla ei ole täydellisyysominaisuutta. Esimerkiksi rationaalilukujoukko $\{2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \dots\} = \{(1 + \frac{1}{1})^1, (1 + \frac{1}{2})^2, (1 + \frac{1}{3})^3, (1 + \frac{1}{4})^4, \dots\}$ on ylhäältä rajoitettu (esimerkiksi 3 on sen yläraja), mutta joukon supremum ei ole rationaaliluku. Lukujoukon yleinen termi on $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ja sen raja-arvona on Neperin luku $e \approx 2,718$ (2.3.6), joka on irrationaalinen (D.2). Esimerkissä 1.2.9 osoitetaan, että neliöjuuri kaksi on irrationaalinen. Geometrisesti täydellisyysaksiooman voi tulkita niin, että reaaliakselilla ei ole reikiä.

ESIMERKKI 1.2.6: Olkoon $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Määritä joukon E supremum ja infimum.

RATKAISU. Luku 1 on joukon E suurin alkio, joten se on myös sen supremum (Lause 1.2.4).

Koska kaikilla $x \in E$ pätee $x > 0$, niin luku 0 on joukon E alaraja. Toisaalta, jos $z > 0$, niin on olemassa luku $x \in E$, jolle $0 < x < z$. Näin ollen luku z ei voi joukon E alaraja. Luku 0 on siis joukon suurin alaraja eli infimum. \triangle



KUVA 1.1. Esimerkin 1.2.6 joukko $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

LAUSE 1.2.7:

- (a) Reaalilukujen \mathbb{R} epättyhjän ylhäältä rajoitetun osajoukon E supremum on yksikäsitteinen.
- (b) Reaalilukujen \mathbb{R} epättyhjän alhaalta rajoitetun osajoukon E infimum on yksikäsitteinen.

TODISTUS. (a) Olkoot s ja s' joukon E supremumeja. Koska s' on eräs joukon yläraja, niin $s = \sup E \leq s'$. Vastaavalla tavalla saadaan $s' = \sup E \leq s$. Näistä yhdessä saamme $s = s'$.

(b) Todistus on samankaltainen kuin kohdan (a) todistus. \square

Seuraavassa lauseessa todistamme, että joukosta löytyy aina lukuja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä joukon supremumia.

LAUSE 1.2.8:

- (a) Olkoon E reaalilukujen \mathbb{R} epättyhjä ylhäältä rajoitettu osajoukko. Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle

$$\sup E - \varepsilon < x \leq \sup E.$$

(b) Olkoon E reaalilukujen \mathbb{R} epätyhjä alhaalta rajoitettu osajoukko. Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle

$$\inf E \leq x < \inf E + \varepsilon.$$

Huomaa, että Tehtävässä 1.2.16 todistetaan yllä oleva lause toiseen suuntaan.

TODISTUS. Todistetaan kohta (a). Väitteen oikeanpuoleinen epäyhtälö seuraa supremumin määritelmästä. Tarkastellaan seuraavaksi vasemmanpuoleista epäyhtälöä. Tehdään vastaoletus: on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $x \leq \sup E - \varepsilon$ kaikilla $x \in E$. Tällöin luku $\sup E - \varepsilon$ on joukon E yläraja, joka on pienempi kuin joukon E supremum. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus ei voi päteä ja $\sup E - \varepsilon < x$ jollekin $x \in E$.

Kohdan (b) todistus on hyvin samankaltainen ja se jätetään Tehtäväksi 1.2.15. \square

Lopuksi osoitamme, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Luvulla $\sqrt{2}$ tarkoitamme reaalilukua x , jolle $xx = 2$.

ESIMERKKI 1.2.9: On olemassa positiivinen reaaliluku x , jolle $xx = 2$ ja $x \notin \mathbb{Q}$.

Annamme esimerkille kaksi ratkaisua.

RATKAISU 1. Tutkitaan joukkoa $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ ja } xx \leq 2\}$. Joukko A on epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, koska (esimerkiksi) $0 \in A$ ja 2 on joukon A eräs yläraja. Täydellisyysaksiooman nojalla joukon A supremum on reaaliluku, merkitään $a = \sup A$. Seuraavaksi osoitamme, että $aa = 2$. Teemme tämän osoittamalla, että epäyhtälöt $aa < 2$ ja $aa > 2$ johtavat ristiriitaan.

Oletetaan ensin, että $aa < 2$. Merkitään $b = 2/a$. Jakamalla epäyhtälö $aa < 2$ luvulla a saamme $a < b$. Olkoon $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Tällöin $a < c < b$. Epäyhtälöstä $(x - y)(x - y) \geq 0$ saamme suoraan laskettua, että $(x + y)(x + y) \geq 4xy$. Soveltamalla tätä luvuille $x = a$ ja $y = b$ saamme $cc \geq ab = 2$. Tästä seuraa, että

$$\frac{2}{c} \cdot \frac{2}{c} = \frac{4}{cc} \leq \frac{4}{2} = 2.$$

Saamme, että $\frac{2}{c} \in A$, mutta tällöin

$$\frac{2}{c} > \frac{2}{b} = a.$$

Tämä on ristiriidassa luvun a määritelmän kanssa, joten epäyhtälö $aa < 2$ ei voi päteä.

Oletetaan sitten, että $aa > 2$. Merkitään $b = 2/a$ ja $c = \frac{1}{2}(a + b)$. Jakamalla epäyhtälö $aa > 2$ luvulla a saamme $a > b$, joten $b < c < a$. Soveltamalla epäyhtälöä $(x + y)(x + y) \geq 4xy$ luvuille $x = a$ ja $y = b$ saamme $cc \geq ab = 2$. Joten kaikilla $x \in A$ pätee $xx < 2 < cc$. Tästä seuraa, että c on joukon A yläraja, mutta koska $c < a$, niin tästä seuraa ristiriita luvun a määritelmän kanssa. Saamme, että epäyhtälö $aa > 2$ ei voi päteä.

Olemme osoittaneet, että on olemassa positiivinen reaaliluku a , jolle $aa = 2$. Lopuksi osoitamme, että a on irrationaaliluku.

Tehdään vastaoletus, että a on rationaaliluku. Tällöin on olemassa $m, n \in \mathbb{N}_1$, joille $a = \frac{m}{n}$. Voimme olettaa, että luvuilla m ja n ei ole muita yhteisiä tekijöitä kuin 1 eli että murtoluku $\frac{m}{n}$ on supistetussa muodossa. Tällöin $2 = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{mm}{nn}$,

josta saamme $mm = 2nn$. Tällöin luku mm on parillinen, josta seuraa, että m on parillinen (Tehtävä 1.2.17). Voimme kirjoittaa luvun m muodossa $2r$ jollekin luonnolliselle luvulle r . Sijoittamalla $m = 2r$ yhtälöön $mm = 2nn$ saamme $2rr = nn$. Koska luku nn on parillinen, niin myös luku n on parillinen. Koska m ja n ovat parillisia, niin luvuilla m ja n on yhteinen tekijä 2. Tämä on ristiriita, joten a ei ole rationaaliluku. \triangle

RATKAISU 2. Olkoon joukko $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ tai } x \cdot x < 2\}$. Joukko A on selvästi epätyhjä ja ylhäältä rajoitettu, koska esimerkiksi $x < 2$ kaikilla $x \in A$. Täydellisyysaksiooman mukaan sillä on supremum, joka on reaaliluku, ja merkitään $a = \sup A$. Siis $a \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan nyt, että $a \cdot a = 2$.

Tehdään vastaoletus, että $a \cdot a \neq 2$. Järjestysaksiooman (J1) mukaan nyt joko $a \cdot a < 2$ tai $a \cdot a > 2$.

Jos $a \cdot a < 2$, niin olkoon $2 - a \cdot a = \varepsilon$. Selvästi $\varepsilon > 0$ ja $a \cdot a = 2 - \varepsilon$. Tiedetään, että $\varepsilon < 1$ (mieti miksi?), joten on olemassa luku $\delta > 0$, jolle $2a\delta + \delta^2 < \varepsilon$. Esimerkiksi $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ käy, koska

$$2a\delta + \delta^2 < 2 \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon^2}{64} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{64} = \frac{33\varepsilon}{64} < \varepsilon,$$

jossa käytettiin tietoa $a < 2$, ja koska $\varepsilon < 1$, niin $\varepsilon^2 < \varepsilon$. Nyt

$$(a + \delta)(a + \delta) = a \cdot a + 2a\delta + \delta^2 < a \cdot a + \varepsilon = 2,$$

joten $(a + \delta) \in A$. Koska $a < a + \delta$, ei a voi olla $\sup A$. Tästä seuraa ristiriita.

Jos taas $a \cdot a > 2$, niin olkoon $b = \frac{2}{a}$. Oletuksesta $a \cdot a > 2$ saadaan jakamalla puolittain luvulla a , että $a > \frac{2}{a} = b$. Olkoon $\varepsilon = a - b$, joten $\varepsilon > 0$ ja $b + \varepsilon = a$. Tarkastellaan lukua $(b + \frac{\varepsilon}{2}) < a$. Nyt

$$\begin{aligned} (b + \frac{\varepsilon}{2})(b + \frac{\varepsilon}{2}) &= b^2 + b\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} = b^2 + b(a - b) + \frac{\varepsilon^2}{4} \\ &= b^2 + ab - b^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} = ab + \frac{\varepsilon^2}{4} = 2 + \frac{\varepsilon^2}{4} > 2, \end{aligned}$$

joten $(b + \frac{\varepsilon}{2})$ on joukon A yläraja ja $(b + \frac{\varepsilon}{2}) < a$, mikä on ristiriita.

Näin on osoitettu, että vastaoletus $a \cdot a \neq 2$ johtaa ristiriitaan, siis välttämättä $a \cdot a = 2$. \triangle

Tehtäviä lukuun 1.2.

1.2.10: Olkoon $x, y > 0$. Osoita, että $\frac{1}{\max\{x, y\}} = \min\{\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\}$.

1.2.11: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$ epätyhjiä. Oletetaan, että a on joukon A yläraja ja b on joukon B yläraja. Tutki, ovatko seuraavat väitteet tosia.

- (a) $a + b$ on joukon $A \cup B$ yläraja.
- (b) ab on joukon $A \cap B$ yläraja.
- (c) $a - b$ on joukon $A \setminus B$ yläraja.

1.2.12: Määritä seuraavien joukkojen infimum ja supremum. (a) $[1, 3]$, (b) $(5, 7]$, (c) $[-4, 3) \cup [1, 4)$, (d) $\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1\}$.

1.2.13: Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \subset B$. Osoita, että $\sup A \leq \sup B$ ja $\inf B \leq \inf A$.

1.2.14: Olkoon $m \in \mathbb{N}_1$ ja $E_n \subset \mathbb{R}$ jokaisella $n = 1, 2, \dots, m$. Jos $s_n = \sup E_n$ ja $p_n = \inf E_n$, niin määritä $\sup(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m)$ ja $\inf(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m)$?

1.2.15: Todista Lauseen 1.2.8(b).

1.2.16: Olkoon $A \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu ja $M \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $x \leq M$ kaikilla $x \in A$ ja jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $x \in A$, jolle $x > M - \varepsilon$, niin $M = \sup A$.

1.2.17: Olkoon $m \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että jos m^2 on parillinen, niin m on parillinen. Tässä $m^2 = mm$.

1.3. Matemaattinen todistaminen ja induktio

Matematiikassa tulokset todistetaan lähtien annetuista oletuksista. Oletukset voivat olla erityisesti kyseiseen tulokseen liittyviä, jolloin ne merkitään näkyviin tuloksen muotoilussa. Oletukset voivat olla myös aksioomia (eli peruslauseita), jotka ovat voimassa kaikille tuloksille ja joiden perusteella todistetaan uusia tuloksia. Ajatuksena on, että aksioomia on mahdollisimman vähän ja että ne ovat mahdollisimman yksinkertaisia. Esimerkiksi reaalityyppisiin liittyvät aksioomat on esitetty luvuissa 1.1 ja 1.2.

Matematiikassa tuloksia kutsutaan lauseiksi, lemmoiksi (eli apulauseiksi) tai korollaareiksi (eli seurauksiksi). Todistus on looginen perustelu, jonka pitäisi vakuuttaa lukija tuloksen oikeellisuudesta. Matemaattinen tulos voidaan muotoilla usealla eri tavalla. Usein muotoilu on: jos jokin on voimassa, niin siitä seuraa jotain. Jos myös päinvastainen tulos on voimassa, niin tulos on tapana muotoilla kahden jos lauseen sijaan muodossa jos ja vain jos. Esimerkiksi muotoilu "A jos ja vain jos B" tarkoittaa, että "jos A, niin B", ja "jos B, niin A". Yleisimmin matemaattinen todistus etenee alkaen oletuksista ja päättyen lauseessa esitettyyn tulokseen. Tällaista todistusta kutsutaan suoraksi todistukseksi.

ESIMERKKI 1.3.1: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

TODISTUS. Olkoon luvut $a, b \in \mathbb{Z}$ parittomia. Nyt on olemassa sellaiset kokonaisluvut $p, q \in \mathbb{Z}$, että $a = 2p + 1$ ja $b = 2q + 1$. Saamme

$$a + b = (2p + 1) + (2q + 1) = 2(p + q + 1),$$

joten $a + b$ on parillinen. □

Matemaattisen tuloksen todistus voi edetä muullakin tavalla kuin suorassa todistuksessa ja näistä esimerkkeinä käsittelemme seuraavaksi epäsuoran todistuksen ja induktiotodistuksen.

Epäsuora todistus tarkoittaa todistusta, jossa johdetaan väitteen vastakohtasta tulos, joka ei ole sopusoinnussa oletusten kanssa. Väitteen vastakohtaa kutsutaan vastaoletukseksi, ja tuloksen, joka ei ole sopusoinnussa oletusten kanssa, sanotaan tuottavan ristiriidan.

ESIMERKKI 1.3.2: Kahden parittoman kokonaisluvun summa on parillinen.

TODISTUS. Olkoon luvut $a, b \in \mathbb{Z}$ parittomia. Tehdään vastaoletus, että myös $a + b$ on pariton. Nyt on olemassa sellaiset kokonaisluvut $p, q \in \mathbb{Z}$, että $a = 2p + 1$ ja $a + b = 2q + 1$. Tällöin

$$b = b + (a - a) = (a + b) - a = (2q + 1) - (2p + 1) = 2(q - p),$$

joten b on parillinen. Tämä on ristiriita oletuksen (b on pariton) kanssa, joten väite on tosi. □

Seuraavaksi tarkastelemme induktiotodistusta.

Induktioaksioma: Olkoon $A \subset \mathbb{N}_1$. Jos joukolla A on ominaisuudet

- (a) $1 \in A$ ja
- (b) jokaisella $n \in A$ pätee, että $n + 1 \in A$,

niin $A = \mathbb{N}_1$.

LAUSE 1.3.3: *Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

- (a) *luvulla 1 on ominaisuus P ;*
- (b) *jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$ pätee, että jos luvulla n on ominaisuus P , niin myös luvulla $n + 1$ on ominaisuus P .*

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ on ominaisuus P .

TODISTUS. Tutkitaan joukko $A = \{n \in \mathbb{N}_1 : \text{luvulla } n \text{ on ominaisuus } P\}$. Tällöin induktioaksioman nojalla $A = \mathbb{N}_1$ eli kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ on ominaisuus P . \square

LAUSE 1.3.4: *Olkoon P sellainen luonnollisten lukujen ominaisuus, että seuraavat ehdot ovat voimassa:*

- (a) *luvulla 1 on ominaisuus P ;*
- (b) *jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$ pätee, että jos kaikilla luonnollisilla luvuilla $k \leq n$ on ominaisuus P , niin myös luvulla $n + 1$ on ominaisuus P .*

Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$ on ominaisuus P .

TODISTUS. Tarkalleen samalla tavalla kuin Lauseen 1.3.3 todistus. \square

Lauseissa 1.3.3 ja 1.3.4 kohtaa (a) kutsutaan *alkuaskeleeksi* ja kohtaa (b) *induktioaskeleeksi*.

ESIMERKKI 1.3.5: Todista induktiolla, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}_1$

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

RATKAISU. Todistamme tuloksen Lauseen 1.3.3 avulla eli induktiolla. Alkuaskel (a) on voimassa, koska

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Oletetaan seuraavaksi, että luvulla n on voimassa

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Osoitetaan, että induktioaskel (2) on voimassa eli että tulos pätee myös luvulla $n + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} 1 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \end{aligned}$$

ja tulos seuraa Lauseesta 1.3.3. \triangle

Lauseissa 1.3.3 ja 1.3.4 kokonaislukujen joukkoa voidaan muuttaa valitsemalla kohdassa (a) kokonaisluku a luvun 1 sijaan ja korvaamalla joukko \mathbb{N}_1 joukolla $\{a, a + 1, \dots\}$.

Tehtäviä lukuun 1.3.

1.3.6: Todista induktiolla, että jokaiselle $n \in \mathbb{N}_1$

$$2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1).$$

1.3.7: Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

1.3.8: Osoita, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$

$$\frac{n^3 + 5n}{6}$$

on kokonaisluku.

1.4. Potenssi ja summamerkintä

Tässä luvussa tutustumme potenssin käsitteeseen reaaliluvuille silloin, kun eksponentti on kokonaisluku. Lisäksi otamme käyttöön summamerkinnän. Potenssit ovat keskeinen teema tässä kirjassa. Tässä luvussa esitellään tapaus x^n , $n \in \mathbb{Z}$. Luvussa 4.2 "Bolzanon lause ja käänteisfunktion jatkuvuus" on tapaus x^q , $q \in \mathbb{Q}$. Tapaus x^μ , $\mu \in \mathbb{R}$, on Luvuissa 6.1 "Irrationaaliluku eksponenttina", 6.2 "Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmfunktio", ja 6.3 "Yleiset eksponentti- ja potenssifunktiot".

MÄÄRITELMÄ 1.4.1: Kaikilla reaaliluvuille x määritellään $x^1 = x$. Jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$ ja $x \in \mathbb{R}$ määritellään $x^{n+1} = x^n x$.

Funktiota $x \mapsto x^n$ kutsutaan *potenssifunktioksi* ja se on määritelty kaikilla reaaliluvuilla.

LAUSE 1.4.2: Kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ ja $m, n \in \mathbb{N}_1$ pätee

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \text{ja} \quad (xy)^m = x^m y^m.$$

TODISTUS. Todistetaan ensimmäinen väite. Muut kohdat todistetaan Tehtävissä 1.4.11 ja 1.4.12. Todistetaan väite induktiolla muuttujan n suhteen. Jos $n = 1$, niin väite pätee määritelmän nojalla. Tehdään induktio-oletus: väite pätee arvolla n . Tutkitaan sitten tapausta x^{m+n+1} . Määritelmän perusteella saamme $x^{m+n+1} = x^{m+n} x$. Induktio-oletuksen nojalla $x^{m+n} = x^m x^n$. Yhdistämällä nämä ja käyttämällä määritelmää saamme

$$x^{m+n+1} = x^{m+n} x = x^m x^n x = x^m x^{n+1}.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. □

Oletetaan sitten, että $x \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m > n$. Tällöin edellisen lauseen perusteella saamme $x^n x^{m-n} = x^{n+(m-n)} = x^m$. Jakamalla yhtälön molemmat puolet termillä x^n saamme $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.

Seuraavaksi laajennamme potenssin määritelmän negatiivisille kokonaisluvuille ja nolalle.

MÄÄRITELMÄ 1.4.3: Reaaliluvulle $x \neq 0$ määritellään

$$x^0 = 1 \quad \text{ja} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}_1.$$

Huomaa, että emme määrittele laskutoimitusta 0^0 . Jos määrittelisimme $0^0 = 1$, niin edellä esitetyt laskusäännöt eivät toteutuisi. Silloin saisimme esimerkiksi $1 = 0^0 = 0^{1-1} = 0^1 0^{-1} = \frac{0}{0}$.

Yhdistämällä määritelmän edellä oleviin laskusääntöihin saamme seuraavan tuloksen. Ensimmäinen väite todistetaan Tehtävässä 1.4.13.

LAUSE 1.4.4: *Kaikilla reaaliluvuilla $x \neq 0$ ja kokonaisluvuilla $m, n \in \mathbb{Z}$ pätee*

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m, \quad (x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \text{ja} \quad (xy)^m = x^m y^m.$$

Seuraavaksi tarkastelemme Bernoullin epäyhtälöä, jonka esitti vuonna 1689 sveitsiläinen matemaatikko Jacob Bernoulli (1654–1705).

ESIMERKKI 1.4.5: Todista *Bernoullin epäyhtälö*: reaaliluvuille $x > -1$ ja luonnollisille luvuille $n = 1, 2, 3, \dots$ on voimassa

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Lisäksi jos $n \geq 2$, niin yhtälö pätee vain, kun $x = 0$.

RATKAISU. Todistamme lauseen induktiolla. Alkuaskel on voimassa, koska arvolla $n = 1$ saadaan

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Oletetaan, että luvulle n pätee $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Luvulle $n + 1$ saadaan

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x. \end{aligned}$$

Väite seuraa Lauseesta 1.3.3.

Oletetaan sitten, että $n \geq 2$, $x > -1$. Tällöin

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2 \cdot x$$

kun $x \neq 0$. Väite seuraa induktiolla samalla tavalla kuin edellisessä tapauksessa, kun tapausta $n = 2$ käytetään alkuaskeleena. \triangle

ESIMERKKI 1.4.6: Todista, että kokonaisluvuille $n \geq 3$ on voimassa

$$n^2 \geq 3n.$$

RATKAISU. Todistamme lauseen induktiolla. Alkuaskel on voimassa, koska arvolla $n = 3$ saadaan

$$3^2 = 9 \geq 9 = 3 \cdot 3.$$

Todistetaan seuraavaksi induktioaskel. Oletetaan, että luonnollisella luvulle $n \geq 3$ pätee

$$n^2 \geq 3n.$$

Luvulle $n + 1$ saadaan

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq 3n + 2n + 1 \geq 3n + 3 = 3(n + 1).$$

Väite seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Esittelemme seuraavaksi summamerkinnän. Olkoon a ja $l \geq a$ kokonaislukuja ja x_a, x_{a+1}, \dots, x_l reaalityöjono. Merkitsemme

$$\sum_{k=a}^l x_k = x_a + x_{a+1} + \dots + x_l.$$

ESIMERKKI 1.4.7: Todista induktiolla, että jokaisella $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

RATKAISU. Todistamme tuloksen induktiolla.

Alkuaskel (a) on voimassa, koska

$$0 = \frac{0^2 \cdot 1^2}{4}.$$

Oletetaan seuraavaksi, että luvulla n on voimassa

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Osoitetaan, että induktioaskel (b) on voimassa eli että tulos pätee myös luvulla $n + 1$. Nyt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=0}^n k^3 \right) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + (4n+4)(n+1)^2}{4} = \frac{(n^2 + 4n + 4)(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+2)^2(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

ja tulos seuraa Lauseesta 1.3.3. △

Lemma 1.4.9 on nimeltään binomikaava, joka on peruslaskusääntö binomikertoimille. Lukujen $n, k \in \mathbb{N}_1$, joille $k \leq n$, binomikerroin on luku

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k))}.$$

Merkitä $\binom{n}{k}$ luetaan "n alle k" tai "n yli k:n". Binomikertoimen voi laskea tapauksissa $n = 0$ tai $k = 0$ tulkitsemalla, että $0! = 1$.

LEMMA 1.4.8: Olkoon $n, k \in \mathbb{N}_1$ ja $k < n$. Silloin

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

TODISTUS. Todistus saadaan laskemalla

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA 1.4.9: (BINOMIKAAVA) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}_1$. Silloin

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

TODISTUS. Todistamme tuloksen induktiolla. Koska arvolla $n = 1$ saamme

$$(x+y)^n = x+y = x^1 y^0 + x^0 y^1,$$

niin alkuaskel on voimassa.

Oletamme seuraavaksi, että tulos on voimassa arvolla n . Luvulle $n+1$ saamme induktio-oletuksen ja Lemman 1.4.8 avulla

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k. \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA 1.4.10: Olkoon $a, q \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}_1$. Silloin

$$\sum_{k=0}^n aq^k = a \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{kun } q \neq 1,$$

ja $s_n = na$, kun $q = 1$.

TODISTUS. Jälkimmäinen väite on selvä. Osoitetaan ensimmäinen väite induktiolla.

Alkuaskel. Kun $n = 1$, niin

$$s_1 = x_0 + x_1 = a + aq = a(1+q) = a(1+q) \frac{1-q}{1-q} = a \frac{1-q^2}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Siis kaava pätee arvolla $n = 1$.

Induktioaskel. Oletetaan, että kaava pätee, kun $n = k - 1$, eli

$$s_k = a \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Osoitetaan, että kaava pätee, kun $n = k$. Nyt

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= s_k + x_{n+1} \stackrel{\text{i.o.}}{=} a \frac{1 - q^k}{1 - q} + aq^k = a \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} + q^k \right) = a \left(\frac{1 - q^k}{1 - q} + \frac{q^k(1 - q)}{1 - q} \right) \\ &= a \frac{1 - q^k + q^k - q^k q}{1 - q} = a \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Induktioperiaatteen nojalla kaava on näin ollen voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, kun $q \neq 1$. \square

Tehtäviä lukuun 1.4.

1.4.11: Osoita induktiolla muuttujan m suhteen, että kaikilla $n, m \in \mathbb{N}_1$ ja $x \in \mathbb{R}$ pätee $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

1.4.12: Osoita induktiolla, että kaikilla $m \in \mathbb{N}_1$ ja $x, y \in \mathbb{R}$ pätee $(xy)^m = x^m y^m$.

1.4.13: Osoita, että $x^m x^n = x^{m+n}$ kaikilla $x \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$. Käy erikseen läpi tapaukset, että m ja n ovat samanmerkkisiä ja että m ja n ovat erimerkkisiä.

1.4.14: Osoita, että

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.4.15: Todista seuraava epäyhtälö: kokonaisluvulle $n \in \mathbb{N}_0$ on voimassa

$$(n+1)! \geq 2^n.$$

1.5. Funktion määritelmä, injektio, surjektio ja bijektio

Tässä luvussa esittelemme funktion ja yleisemmän relaation käsitteet. Tarkastelemme myös sitä, milloin relaatio on funktio. Vaikka lukujonon määritelmässä tarvitaan funktion käsitettä, niin varsinaisesti tämän luvun asioita tarvitaan Luvusta 3 "Funktion raja-arvo" alkaen.

Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Määritellään joukkojen A ja B *kartesinen tulo*, eli tulojoukko, asettamalla

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

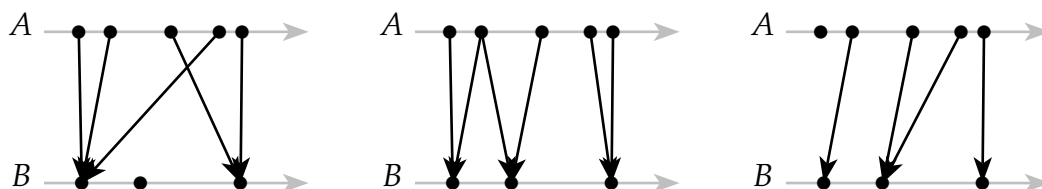
Jos $R \subset A \times B$, niin sanotaan, että R on *relaatio* joukosta A joukkoon B . Esimerkiksi, jos asetamme $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{3, 4\}$, niin

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}.$$

Tällöin esimerkiksi joukko $\{(1, 3), (1, 4)\}$ on relaatio joukosta A joukkoon B .

MÄÄRITELMÄ 1.5.1: Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. Relatio $R \subset A \times B$ on *funktio* (eli *kuvaus*), jos jokaista $a \in A$ kohti on olemassa täsmälleen yksi $b \in B$, jolle $(a, b) \in R$. Tällöin merkitään $R: A \rightarrow B$. Joukkoa A sanotaan funktion R *määrittelyjoukoksi* tai *lähtöjoukoksi*, joukkoa B sanotaan funktion R *arvojoukoksi* tai *maalijoukoksi*.

Funktiota $f: A \rightarrow B$ sanotaan *reaalimuuttujan* funktioksi, jos sen määrittelyjoukko A on reaalilukujen osajoukko, ja *reaaliarvoiseksi* funktioksi, jos sen arvojoukko B on reaalilukujen osajoukko. Yleensä käsittelemme funktioita, jotka on annettu muodossa $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, missä $A \subset \mathbb{R}$. Funktiota voidaan myös merkitä $x \mapsto f(x)$. Jos funktiolla on lauseke, niin se voidaan antaa suljetussa muodossa, esimerkiksi $f(x) = 1 + x^2$.



KUVA 1.2. Kolme relaatiota joukosta A joukkoon B , joista vain vasemmanpuoleisin on funktio.

Kuvassa 1.2 on esitetty kolme relaatiota, joista vain vasemmanpuoleisin on funktio. Keskimmäinen ei ole funktio, koska yhteen määrittelyjoukon alkioon liittyy kaksi arvojoukon alkioita. Oikeanpuoleisin ei ole funktio, koska yhteen määrittelyjoukon alkioon ei liity yhtään arvojoukon alkioita.

Usein funktion määrittelyssä esiintyvät joukot ovat välejä.

MÄÄRITELMÄ 1.5.2: Joukko $\Delta \subset \mathbb{R}$ on *väli*, jos se on jotakin seuraavista tyypeistä: $[a, a] = \{a\}$, (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$ tai \mathbb{R} , missä $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Relaatiolle voidaan helposti määritellä käänteisrelaatio. Jos $R \subset A \times B$, niin määritellään sen *käänteisrelaatio* asettamalla

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}.$$

Tällöin $R^{-1} \subset B \times A$. Esimerkiksi joukosta $A = \{1, 2, 3\}$ joukkoon $B = \{3, 4\}$ määrittelemämme relaation $\{(1, 3)(1, 4)\}$ käänteisrelaatio joukosta B joukkoon A on $\{(3, 1), (4, 1)\}$.

On syytä huomata, että funktion käänteisrelaatio ei välttämättä ole funktio, kuten on Kuvassa 1.2 vasemmalla olevan funktion tapauksessa.

MÄÄRITELMÄ 1.5.3: Olkoon $f: A \rightarrow B$ funktio. Jos $A' \subset A$, niin

$$f(A') = \{f(a) \in B : a \in A'\}.$$

Joukkoa $f(A')$ kutsutaan joukon A' *kuva*ksi. Jos $B' \subset B$, niin

$$f^{-1}(B') = \{a \in A : f(a) \in B'\}.$$

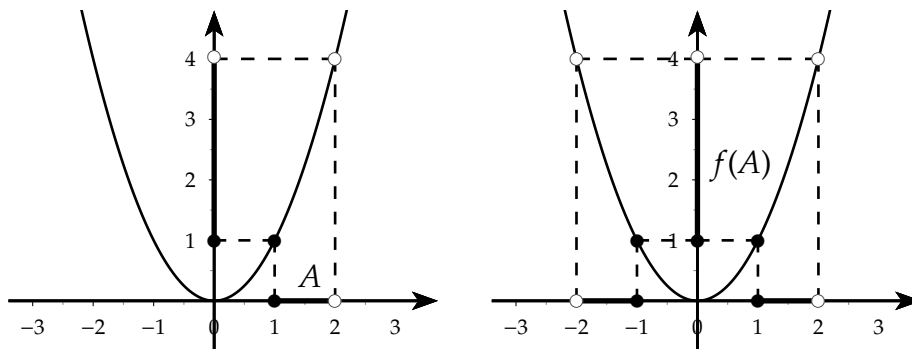
Joukkoa $f^{-1}(B')$ kutsutaan joukon B' *alkukuva*ksi.

Seuraavassa esimerkissä huomaamme, että joukon A kuvan $f(A)$ alkukuva ei välttämättä ole joukko A , eli voi olla, että $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

ESIMERKKI 1.5.4: Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Määritä joukon $A = [1, 2)$ kuva ja joukon $f(A)$ alkukuva.

RATKAISU. Tarkastellaan tilannetta Kuvassa 1.3 esitetyn kuvaajan perusteella. Nyt

$$f(A) = [1, 4) \quad \text{ja} \quad f^{-1}(f(A)) = (-2, -1] \cup [1, 2). \quad \triangle$$



KUVA 1.3. Joukon $A = [1, 2)$ kuva vasemmalla ja joukon $f(A) = [1, 4)$ alkukuva oikealla.

Seuraavaksi käsittelemme kysymystä, milloin funktion käänteisrelaatio on funktio.

MÄÄRITELMÄ 1.5.5: Funktio $f: A \rightarrow B$ on *injektio*, jos $f(a_1) \neq f(a_2)$ aina, kun $a_1 \neq a_2$.

Vaihtoehtoisesti injektion voi määritellä vaatimalla, että $f(a_1) = f(a_2)$, jos ja vain jos $a_1 = a_2$. Kolmas tapa on sanoa, että jokaista $b \in B$ kohti on olemassa korkeintaan yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

MÄÄRITELMÄ 1.5.6: Funktio $f: A \rightarrow B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$.

Vaihtoehtoisesti määritellen funktio on surjektio, jos jokaista $b \in B$ kohti on olemassa vähintään yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

MÄÄRITELMÄ 1.5.7: Funktio $f: A \rightarrow B$ on *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio.

Vaihtoehtoisesti bijektiivisyys voidaan määritellä vaatimalla, että jokaista $b \in B$ kohti on olemassa *täsmälleen* yksi $a \in A$, jolle $f(a) = b$.

ESIMERKKI 1.5.8: Osoita, että

- (a) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ on injektio mutta ei ole surjektio;
- (b) $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$ on surjektio mutta ei ole injektio;
- (c) $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = x$ on bijektio.

RATKAISU. (a) Selvästi $f(x_1) = f(x_2)$, jos ja vain jos $x_1 = x_2$. Funktio ei ole surjektio, koska mikään luku ei kuvaudu (esimerkiksi) luvulle -1 .

(b) Funktio g on surjektio, koska $g(\sqrt{x}) = x$. Funktio ei ole injektio, koska (esimerkiksi) $g(-1) = 1 = g(1)$.

(c) Sama todistus kuin (a)-kohdassa antaa, että funktio h on injektio. Se on surjektio, koska jokaista $x \in [0, \infty)$ kohti löytyy välin $[0, \infty)$ luku, joka kuvautuu sille, nimittäin $h(x) = x$. △

LAUSE 1.5.9: Olkoon $f: A \rightarrow B$. Funktion käänteisrelaatio f^{-1} on funktio, jos ja vain jos funktio f on bijektio.

TODISTUS. Tehtävä 1.5.21. □

Käsitellään seuraavaksi funktioiden pisteittäisiä laskutoimituksia. Olkoot $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ja $m \in \mathbb{R}$. Määrittelemme näiden avulla uudet funktiot $f + g$, mf ja $\frac{f}{g}$ asettamalla, että

$$\begin{aligned} f + g: A &\rightarrow \mathbb{R}, & (f + g)(x) &= f(x) + g(x); \\ mf: A &\rightarrow \mathbb{R}, & (mf)(x) &= mf(x); \\ \frac{f}{g}: A \setminus \{x: g(x) \neq 0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Lopuksi tutustumme yhdistettyyn funktioon.

MÄÄRITELMÄ 1.5.10: Olkoot $A, B, C \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$. Määritellään funktio $A \rightarrow C$ asettamalla $x \mapsto g(f(x))$. Näin määriteltyä funktiota kutsutaan funktioiden f ja g *yhdistetyksi funktioksi* ja merkitään $g \circ f$.

Esimerkiksi $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4x^2$, voidaan ymmärtää funktioiden $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, yhdistettynä funktiona $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

LAUSE 1.5.11: Olkoot $A, B, C, D \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ja $h: C \rightarrow D$. Funktioiden yhdistäminen on liitännäinen toimitus eli

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

TODISTUS. Jokaisessa pisteessä $x \in A$ pätee

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = (f \circ (g \circ h))(x). \end{aligned} \quad \square$$

Käsittelemme seuraavaksi lyhyesti polynomeja. Oletamme, että polynomit ovat lukijalle tuttuja.

Laskemalla yhteen potenssifunktioita ja vakiofunktion saamme polynomi-funktion.

MÄÄRITELMÄ 1.5.12: Funktio $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *polynomi*, jos se on muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0,$$

missä a_n, \dots, a_0 ovat reaalikertoimia. Jos $a_n \neq 0$, niin sanotaan, että polynomin P aste on n .

Olkoon $f: A \rightarrow B$. Jos jollakin $x \in A$ pätee $f(x) = 0$, niin lukua x kutsutaan funktion f nollakohdaksi.

Esitämme seuraavat kolme lausetta ilman todistuksia, jotka löytyvät esimerkiksi Lauri Myrbergin kirjasta [20] sivuilta 80–83.

LAUSE 1.5.13: Olkoon $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polynomi. Jos sillä on nollakohta x_0 , niin P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = (x - x_0)Q(x),$$

jossa $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on polynomi.

LAUSE 1.5.14: Olkoon $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -asteinen polynomi. Jos sillä on nollakohdat x_1, \dots, x_n , niin P voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n),$$

jossa a_n polynomin P korkeimman asteen termin kerroin.

LAUSE 1.5.15: Olkoon $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -asteinen polynomi. Tällöin sillä on korkeintaan n eri nollakohtaa.

MÄÄRITELMÄ 1.5.16: Olkoot $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polynomeja. Oletetaan, että x_1, \dots, x_n ovat polynomin Q nollakohdat. Funktiota $R: \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

sanotaan *rationaalifunktioksi*.

Tehtäviä lukuun 1.5.

1.5.17: Olkoot $A = \{1, 3, 5\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ joukkoja. Määrittele, jos mahdollista, joukosta A joukkoon B relaatio, joka

- on funktio ja jonka käänteisrelaatio on funktio,
- on funktio ja jonka käänteisrelaatio ei ole funktio,
- ei ole funktio ja jonka käänteisrelaatio on funktio,
- ei ole funktio ja jonka käänteisrelaatio ei ole funktio.

1.5.18: Olkoot $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -x$ kun $x < 0$, $A = (-1, 2)$, $B = [-2, -1] \cup [0, 1]$ ja $C = (1, 2]$. Määritä joukkojen A , B ja C kuvat $f(A)$, $f(B)$ ja $f(C)$ sekä joukkojen $f(A)$, $f(B)$ ja $f(C)$ alkukuvat.

1.5.19: Olkoot $A = (-2, -1)$, $B = (0, 1] \cup (2, 3)$ ja $C = (-2, \infty)$. Määritä sellainen funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, että $f(A) = B$ ja $f^{-1}(B) = C$.

1.5.20: Tutki, mitkä seuraavista funktioista ovat injektioita ja mitkä surjektioita:

(a) $f: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = x - 1$ kun $x \geq 1$ ja $f(x) = 1 - x$ kun $x < 1$,

(b) $g: [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$, $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x < 0, \\ x^2, & \text{kun } x \geq 0. \end{cases}$

(c) $h: [0, 1] \rightarrow [-\frac{1}{4}, 0]$, $h(x) = x^2 - x$.

1.5.21: Todista Lause 1.5.9.

1.5.22: Olkoot $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = x$ kun $x \leq 0$ ja $f(x) = -x$ kun $x > 0$, ja $g: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = x^2$. Määritä funktiot $g \circ f$ ja $f \circ g$.

1.5.23: Olkoot $f: A \rightarrow B$ ja $g: B \rightarrow C$ bijektioita. Osoita, että $g \circ f: A \rightarrow C$ on bijektio.

1.5.24: Tässä tehtävässä johdetaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaava. Olkoon $P(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Määritä polynomin P nollakohdat. Vihje: kirjoita yhtälö muodossa $ax^2 + bx = -c$, täydennä vasen puoli neliöksi ja ratkaise x .

1.6. Trigonometrinen funktioiden geometrinen määritelmä

Oletamme, että trigonometriset funktiot ovat lukijalle tuttuja, ja esitämme tässä ainoastaan sini- ja kosinifunktioiden perusominaisuuksia.

Reaaliluku π on yksisäteisen puoliympyrän kaaren pituus. Haluamme, että funktioilla $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on seuraavat ominaisuudet:

(a) $\sin(0) = 0$ ja $\cos(0) = 1$;

(b) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ ja $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$;

(e) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$;

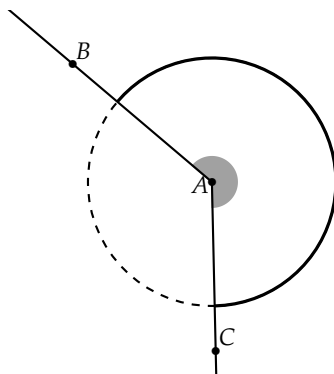
(f) $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, kun $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Näistä ominaisuuksista voidaan johtaa kaikki muut sini- ja kosinifunktioiden ominaisuudet. Yllä olevat ominaisuudet voidaan myös johtaa yksikköympyrästä, kun meillä on käytössä reaalitason perusominaisuudet, ympyrän kaaren pituus ja pinta-alan käsite. Näytämme seuraavaksi kuinka tämä trigonometrinen funktioiden geometrinen määritelmä toimii. Vaihtoehtoisesti trigonometriset funktiot voidaan määritellä analyyttisesti sarjojen avulla, katso Luku 15.5.

Asetetaan kulma yksikköympyrän päälle siten, että kulman kärki on ympyrän keskipisteessä. Tällöin kulma rajaa yksikköympyrästä kaaren, katso Kuva 1.4. Kulman suuruudella tarkoitamme tämän kaaren pituutta, joten kulman suuruus on aina välillä $[0, 2\pi]$.

Merkinnällä $\sphericalangle(B, A, C)$ tarkoitamme sellaisen kulman suuruutta, jonka kärki on pisteessä A ja jonka vasen kylki kulkee pisteen B kautta ja oikea kylki pisteen C kautta, katso Kuva 1.4.

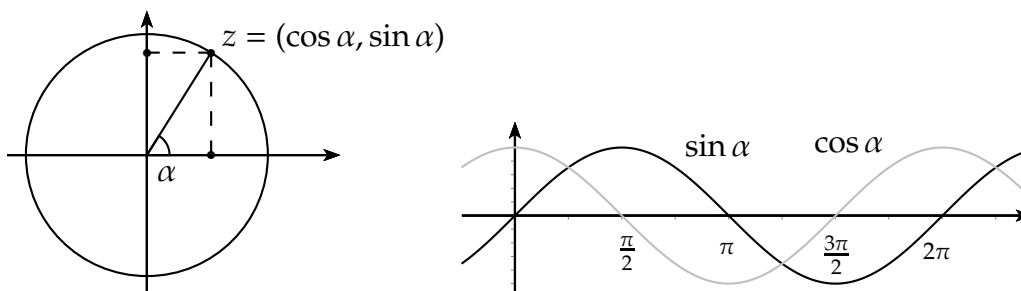
Funktiot $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ja $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ovat funktioita, jotka geometrisesti tulkittuna antavat yksikköympyrän pisteen $P = (\cos x, \sin x)$, jossa x on $\sphericalangle(P, (0, 0), (1, 0))$, katso Kuva 1.5. Nyt on selvää, että $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ja

Kuva 1.4. Kulma B, A, C ja sitä vastaava yksikköympyrän kaari.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Lisäksi huomataan, että $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, katso Tehtävä 1.6.4.

MÄÄRITELMÄ 1.6.1: Olkoot $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha' \in [0, 2\pi)$, sellainen reaaliluku, että $\alpha = \alpha' + k2\pi$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$, ja $z = (x, y)$ se yksikköympyrän piste, jolle $\angle(z, (0, 0), (1, 0)) = \alpha'$. Silloin määrittelemme funktiot sini ja kosini

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \sin \alpha = y, \quad \cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \cos \alpha = x.$$



Kuva 1.5. Yksikköympyrä ja trigonometriset funktiot.

Määritelmän mukaan suorakulmaisen kolmion (kummalle tahansa) terävälle kulmalle α on voimassa

$$\sin \alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}},$$

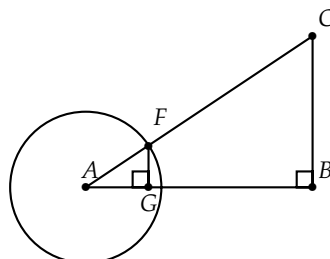
$$\cos \alpha = \frac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}.$$

Todistetaan näistä ensimmäinen, kun hypotenuusan pituus on vähintään yksi. Todistus tapauksessa hypotenuusan pituus on alle yksi on samanlainen. Olkoon ABC suorakulmainen kolmio, jonka kulma B on suorakulma. Tutkitaan kulman A siniä ja olkoon α kulman A suuruus. Piirretään yksikköympyrä, jonka keskipiste on A . Piirretään yksikköympyrän ja hypotenuusan leikkauspisteestä F normaali kulman A toiselle kyljelle, katso Kuva 1.6. Olkoon G normaalin kantapiste. Tällöin sinin määritelmän nojalla $\sin(\alpha)$ on janan FG pituus $|FG|$. Koska

kolmiot ABC ja AFG ovat yhdenmuotoisia (kk), niin saamme

$$\frac{|FG|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|AC|},$$

josta väite seuraa, koska $|AF| = 1$.



KUVA 1.6. Kulman A sini suorakulmaisessa kolmiossa ABC .

LEMMA 1.6.2: Kaikille reaalityöluville $x, y \in \mathbb{R}$ ovat voimassa yhteenlaskukaavat

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

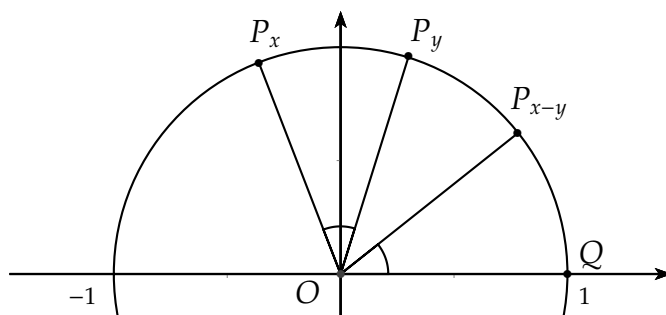
TODISTUS. Todistetaan viimeinen yhtälö. Olkoot $Q = (1, 0)$, $P_x = (\cos x, \sin x)$, $P_y = (\cos y, \sin y)$ ja $P_{x-y} = (\cos(x-y), \sin(x-y))$, katso Kuva 1.7. Nyt $\angle(P_x, 0, P_y) = \angle(P_{x-y}, 0, Q)$, joten $|P_x P_y| = |P_{x-y} Q|$. Tästä seuraa

$$(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = (\cos(x - y) - 1)^2 + \sin^2(x - y)$$

ja koska $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, niin saadaan edelleen

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y).$$

Muut kolme yhtälöä todistetaan Tehtävässä 1.6.5, ne seuraavat tässä todistetusta tuloksesta käyttämällä kaavoja $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$. \square



KUVA 1.7. Funktio $\cos(x - y)$ graafisesti tulkittuna.

LEMMA 1.6.3: *Sini- ja kosinifunktioille on voimassa*

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ kun } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Tehtävässä 1.6.6 todistetaan epäyhtälö negatiivisille muuttujan x arvoille.

TODISTUS. Olkoon $0 < \alpha < \pi/2$, ja merkitään pisteitä $P = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ ja $Q = (1, 0)$. Origin ja pisteen P kautta kulkevan suoran yhtälö on $y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot x$, joten se leikkaa suoran $x = 1$ pisteessä $R = (1, \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha})$. Kuvasta 1.8 huomataan, että

$$\triangle OQP \text{ pinta-ala} = \frac{\sin \alpha}{2}, \quad \text{sektorin } OQP \text{ pinta-ala} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi 1^2 = \frac{\alpha}{2}$$

ja

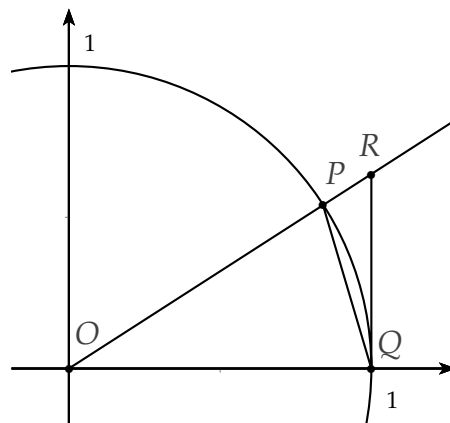
$$\triangle OQR \text{ pinta-ala} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

Koska

$$\triangle OQP \text{ pinta-ala} < \text{sektorin } OQP \text{ pinta-ala} < \triangle OQR \text{ pinta-ala},$$

niin

$$\frac{\sin \alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

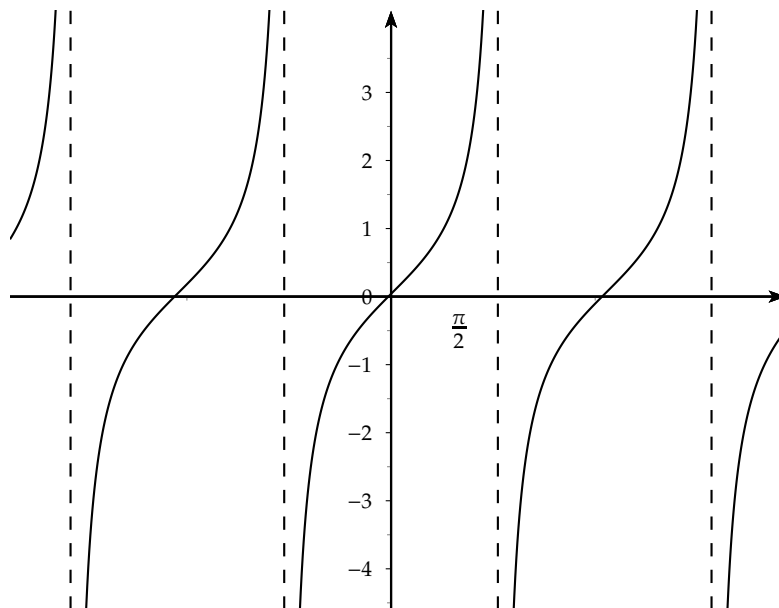


Kuva 1.8. Kolmiot $\triangle OQP$ ja $\triangle OQR$ ja sektori OQP .

Luvun α valinnan perusteella $\alpha > 0$, $\sin \alpha > 0$ ja $\cos \alpha > 0$, joten

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1. \quad \square$$

Sini- ja kosinifunktion avulla voidaan määritellä myös muita trigonometrisiä funktioita. Tärkein näistä on tangenttifunktio $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi: n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Funktion $x \mapsto \tan x$ kuvaaja on esitetty Kuvassa 1.9.



KUVA 1.9. Tangenttifunktion kuvaaja.

Tehtäviä lukuun 1.6.

1.6.4: Perustele kuvien avulla, että $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$ ja $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$.

1.6.5: Todista Lemman 1.6.2 kolme ensimmäistä yhtälöä viimeisen yhtälön avulla.

1.6.6: Osoita, että

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{kun } -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Osa 1

Raja-arvo

LUKU 2

Lukujonon raja-arvo

2.1. Itseisarvo

Esittelemme tässä luvussa reaaliluvun itseisarvon, kahden reaaliluvun välisen etäisyyden ja niihin liittyvän kolmioepäyhtälön. Kahden reaaliluvun välisellä etäisyydellä on keskeinen merkitys niin lukujonon raja-arvon kuin funktion raja-arvon käsitteissä.

MÄÄRITELMÄ 2.1.1: Reaaliluvun x itseisarvo määritellään seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0, \\ -x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvo on aina ei-negatiivinen luku ja se on nolla, jos ja vain jos luku itse on nolla. Lisäksi pätee, että $|x| = |-x|$.

Geometrisesti $|x|$ tulkitaan reaaliakselilla luvun x etäisyydeksi origosta. Tällä tulkinnalla huomaamme, että $|x| < h$, $h > 0$, tarkoittaa reaaliakselin niitä lukuja, joiden etäisyys origosta on vähemmän kuin h eli saamme joukon $(-h, h)$. Lauseke $|x - y|$ tulkitaan geometrisesti lukujen x ja y väliseksi etäisyydeksi. Jos $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$, niin mitkä luvut y toteuttavat epäyhtälön $|x - y| < h$? Käyttämällä geometrista tulkintaa huomaamme, että luvun y etäisyyden luvusta x on oltava vähemmän kuin h , joten saamme joukon $(x - h, x + h)$.



KUVA 2.1. Lausekkeet $|x| < \frac{1}{4}$ ja $|2 - y| < 1$ tulkittuna geometrisesti.

Jatkossa tulemme käyttämään paljon muodossa $0 < |x - y| < h$ olevaa ehtoa, missä reaaliluku x on kiinteä. Edellisistä ehdoista tämä eroaa sillä, että lukujen x ja y ei sallita olevan samoja, katso Kuva 2.2.



KUVA 2.2. Lausekkeet $0 < |x| < \frac{1}{4}$ ja $0 < |2 - y| < 1$ tulkittuna geometrisesti.

Seuraava kolmioepäyhtälö on usein hyödyllinen arvioitaessa lausekkeita.

LAUSE 2.1.2: *Kolmioepäyhtälöt*

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

ovat voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

TODISTUS. Todistetaan ensin väitteen oikea puoli. Itseisarvon määritelmän perusteella

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

ja vastaavasti luvulle y

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Laskemalla epäyhtälöt puolittain yhteen saamme

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

joka on väitteen oikea puoli.

Todistetaan seuraavaksi väitteen vasen puoli. Oikean puolen avulla saamme

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

josta seuraa

$$|x| - |y| \leq |x + y|.$$

Vaihtamalla muuttujien x ja y paikkaa symmetrisesti saamme

$$-(|x| - |y|) = |y| - |x| \leq |y + x| = |x + y|.$$

Kertomalla epäyhtälö luvulla -1 saamme

$$|x| - |y| \geq -|x + y|.$$

Olemme saaneet

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

joka on väitteen vasen puoli. □

Soveltamalla kolmioepäyhtälöä (Lause 2.1.2) luvuille x ja $-y$ sekä muistamalla, että $|y| = |-y|$, saamme seuraavan tuloksen.

KOROLLAARI 2.1.3: *Epäyhtälöt*

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

ovat voimassa kaikilla reaaliluvuilla x ja y .

ESIMERKKI 2.1.4: Oletetaan, että $|x - 4| < 4^{-99}$ ja $|y - 7| < 4^{-33}$. Päteekö, että $|x + y - 11| < 4^{-32}$?

RATKAISU. Kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla saamme

$$|x + y - 11| = |x - 4 + y - 7| \leq |x - 4| + |y - 7|.$$

Käyttämällä esimerkin oletuksia ja arvioimalla lukua 4^{-99} ylöspäin saamme

$$|x - 4| + |y - 7| < 4^{-99} + 4^{-33} < 4^{-33} + 4^{-33} = 2 \cdot 4^{-33} < 4 \cdot 4^{-33} = 4^{-32},$$

joten esitetty epäyhtälö pätee. △

LAUSE 2.1.5: Epäyhtälö $|x| \leq |y|$ on voimassa, jos ja vain jos $x^2 \leq y^2$.

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $|x| \leq |y|$. Tällöin

$$|x|^2 = |x||x| \leq |x||y| \leq |y||y| = |y|^2.$$

Itseisarvon määritelmän nojalla kaikilla reaaliluvuilla pätee, että $|x|^2 = x^2$. Saamme $x^2 \leq y^2$.

Oletetaan sitten, että $x^2 \leq y^2$. Koska itseisarvon määritelmän nojalla $x^2 = |x|^2$, niin nyt on voimassa $|x|^2 \leq |y|^2$. Koska $|x| \geq 0$ ja $|y| \geq 0$, niin $|x| \leq |y|$. \square

ESIMERKKI 2.1.6: Ratkaise epäyhtälö

$$\left| \frac{x-1}{x+4} \right| < 1.$$

RATKAISU. Itseisarvolausekkeen jakaja on nolla, kun $x = -4$. Oletetaan, että $x \neq -4$. Korottamalla molemmat puolet toiseen potenssiin saamme (Lause 2.1.5)

$$\left(\frac{x-1}{x+4} \right)^2 < 1.$$

Se voidaan kirjoittaa muotoon $(x-1)^2 < (x+4)^2$ ja edelleen muotoon $10x > -15$. Ratkaisuksi saamme siis $x > -\frac{3}{2}$. \triangle

Tehtäviä lukuun 2.1.

2.1.7: Olkoon h positiivinen reaaliluku. Todista itseisarvon määritelmän nojalla, että $|x| \leq h$, jos ja vain jos $x \in [-h, h]$.

2.1.8: Todista itseisarvon määritelmän nojalla, että $|xy| = |x||y|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2.1.9: Tutkitaan ehtoja $|x-3| < 10^{-4}$ ja $|y-5| < 4^{-44}$.

- Kirjoita molemmat ehdot väleinä muodossa $x \in (a_1, a_2)$ ja $y \in (b_1, b_2)$.
- Piirrä tilanteesta kuva.
- Onko olemassa reaalilukua, joka toteuttaa molemmat ehdot?

2.1.10: Mitkä luvut x toteuttavat epäyhtälön $|7x-1| < 2$?

2.1.11: Oletetaan, että $|x-7| < 4^{-42}$ ja $|35-y| < 2^{-42}$. Mitä voidaan sanoa lukujen $x+y$ ja 42 välisestä etäisyydestä?

2.1.12: Oletetaan, että $|x-7| < 4^{-42}$ ja $|35-y| < 2^{-42}$. Mitä voidaan sanoa luvun xy suuruudesta?

2.1.13: Mitkä luvut $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat epäyhtälön $x-1 < |x-1|$?

2.1.14: Oletetaan, että reaaliluvut x, y ja z toteuttavat ehdot $y \leq x \leq z$. Osoita, että $|x| \leq \max\{|y|, |z|\} \leq |y| + |z|$. Onko väite $|x| \leq \min\{|y|, |z|\}$ aina totta?

2.1.15: Etsi sellainen positiivinen reaaliluku m , että $|x^2-1| \leq m|x-1|$ kaikilla $x \in (0, 2)$.

2.2. Lukujonon raja-arvo

Tässä luvussa esittelemme lukujonon ja sen suppenemiseen liittyviä tuloksia. Suppenevan lukujonon raja-arvo on keskeinen käsite funktion jatkuvuuden käsittelyssä ja sarjoissa.

MÄÄRITELMÄ 2.2.1: Jos jokaista lukua $n \in \mathbb{N}_0$ tai $n \in \mathbb{N}_1$ asetetaan vastamaan reaalityluku x_n , niin syntyy *lukujono*

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \quad \text{tai} \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

tai lyhyemmin (x_n) . Lukujono on siis funktio $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tai funktio $\mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{R}$.

Yksinkertainen lukujono saadaan asettamalla $x_n = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Toinen yksinkertainen esimerkki saadaan asettamalla $x_n = 1$, jos n on parillinen, ja $x_n = 2$, jos n on pariton.

MÄÄRITELMÄ 2.2.2: Lukujono (x_n) *suppenee* kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

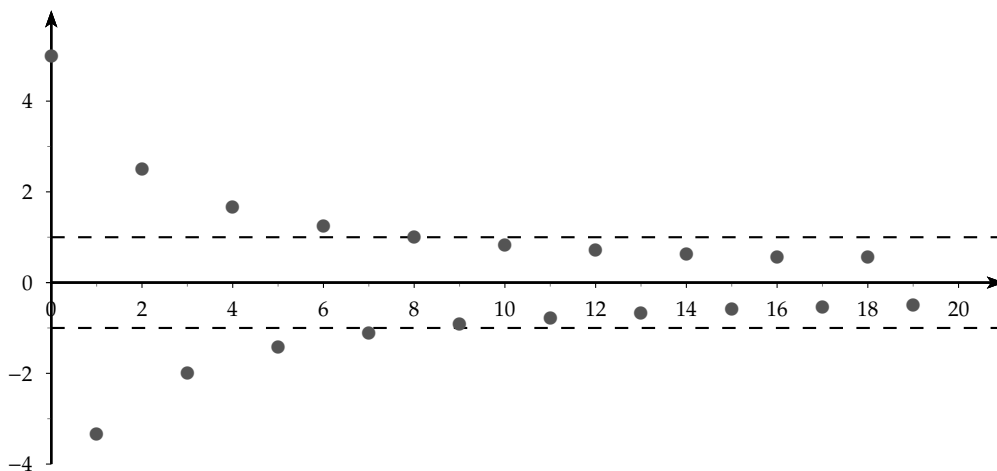
$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \text{kun } n > n_\varepsilon.$$

Tällöin sanotaan, että lukujonolla (x_n) on *raja-arvo* a ja merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{tai} \quad x_n \rightarrow a, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Jos lukujono ei suppene, niin se *hajaantuu*.

Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n \frac{10}{n+2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Tämän lukujonon kaksikymmentä ensimmäistä jäsentä on esitetty Kuvassa 2.3 koordinaatteina (n, x_n) , $n = 0, \dots, 19$. Kuvasta voi arvata, että lukujono suppenee kohti lukua 0. Kuinka raja-arvon määritelmä näkyy kuvassa? Kuvassa on visualisoitu tilanne $\varepsilon = 1$. Tätä vastaavat katkoviivoin piirretyt suorat $y = \pm 1$. Indeksien n arvosta 9 alkaen koordinaattipisteet ovat katkoviivojen välissä eli näille luvuille pätee $|x_n - 0| < 1$. Todistetaan seuraavaksi tarkasti, että lukujono suppenee kohti lukua 0.



Kuva 2.3. Lukujonon $x_n = (-1)^n \frac{10}{n+2}$ kaksikymmentä ensimmäistä jäsentä.

ESIMERKKI 2.2.3: Osoita määritelmän nojalla, että lukujono (x_n) , jossa $x_n = (-1)^n \frac{5}{n/2+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$, suppenee kohti lukua 0.

Meidän on arvioitava lauseketta $|x_n - 0|$. Sijoittamalla tähän luvun x_n määritelmän saamme

$$\left| (-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1} - 0 \right| = \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1} = \frac{10}{n + 2}.$$

Meidän on löydettävä lausekkeelle yläraja, joten arvioimme sitä ylöspäin pienentämällä jakajaa:

$$\left| (-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1} - 0 \right| = \frac{10}{n + 2} < \frac{10}{n}.$$

Olemme löytäneet sopivan helpon ylärajan lausekkeelle $|x_n - 0|$. Jos $\frac{10}{n} \leq \varepsilon$, niin silloin myös $|x_n - 0| < \varepsilon$. Millä luonnollisilla luvuilla pätee $\frac{10}{n} \leq \varepsilon$? Ratkaisemalla tästä epäyhtälöstä n saamme $n \geq \frac{10}{\varepsilon}$. Valitsemme luvuksi n_ε pienimmän luonnollisen luvun, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{10}{\varepsilon}$. Tällöin ehto pätee (ainakin) kaikilla $n > n_\varepsilon$. Olemme löytäneet ratkaisun tehtävälle. Nyt meidän täytyy vielä kirjoittaa ratkaisu muotoon, josta lukijan on helppo tarkistaa sen oikeellisuus. Kokoamme siis edelle esitetty asiat hieman eri järjestyksessä kokonaisuudeksi.

RATKAISU. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{10}{\varepsilon}$. Tällöin

$$\left| (-1)^n \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1} - 0 \right| = \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1} = \frac{10}{n + 2} < \frac{10}{n} < \frac{10}{\frac{10}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. △

ESIMERKKI 2.2.4: Osoita määritelmän nojalla, että lukujono (x_n) , missä $x_n = 2 + \frac{1}{2n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, suppenee kohti lukua 2.

Toimimme taas samalla tavalla kuin edellisessä esimerkissä. Suttupaperilla arvioimme ensin lauseketta $|x_n - 2|$, jotta löydämme sille käyttökelpoisen ylärajan. Tämän jälkeen voimme valita luvun n_ε . Lopuksi kokoamme ratkaisun suttupaperilta ja muutamme järjestyksen lukijaystävälliseksi.

RATKAISU. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Nyt $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ ja jokaiselle $n > n_\varepsilon$ on voimassa $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon}$. Tällöin

$$|x_n - 2| = \left| \frac{1}{2n-1} \right| = \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n+n-1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

kaikilla $n > n_\varepsilon$. △

Kun osoitamme määritelmän nojalla, että lukujono suppenee, niin arvioimme lauseketta $|x_n - a|$ ylhäältä päin. Tämän arvioinnin voi tehdä usealla eri tavalla. Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa (x_n) , missä $x_n = \frac{3}{x^2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Nyt voimme sieventää

$$|x_n - 0| = \left| \frac{3}{n^2} - 0 \right| = \frac{3}{n^2}$$

ja arvioida

$$|x_n - 0| = \frac{3}{n^2} \leq \frac{3}{n}.$$

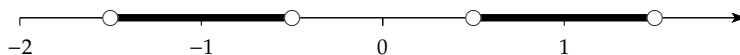
Nyt voimme arvioida, että $\frac{3}{n^2} < \varepsilon$ ja siten saamme $n_\varepsilon^1 > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$. Voimme myös arvioida, että $\frac{3}{n} < \varepsilon$ ja saamme $n_\varepsilon^2 > \frac{3}{\varepsilon}$. Määritelmässä esiintyväksi luvuksi n_ε voimme valita kumman tahansa luvuista n_ε^1 ja n_ε^2 .

ESIMERKKI 2.2.5: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita, että lukujono hajaantuu.

RATKAISU. Oletetaan, että lukujono suppenee kohti lukua a . Määritelmän mukaan lukua $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vastaa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Kun n on parillinen, niin $x_n = 1$ ja luku a on välillä $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Kun n on pariton, niin $x_n = -1$ ja luku a on välillä $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Tilanne on esitetty Kuvassa 2.4. Koska luvun a tulee olla molemmilla väleillä $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ja $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ja niillä ei ole yhteisiä pisteitä, saamme ristiriidan. Ei siis ole olemassa lukua a , jota kohti lukujono suppenisi. Näin ollen lukujono hajaantuu. \triangle



KUVA 2.4. Lausekkeet $|-1 - y| < \frac{1}{2}$ ja $|1 - y| < \frac{1}{2}$ tulkittuna geometrisesti.

Seuraava lause osoittaa, että jos lukujono suppenee, niin sen raja-arvo on yksikäsitteinen, eli suppenevalla lukujonolla ei voi olla kahta (tai useampaa) raja-arvoa. Ominaisuus on matematiikan toimivuuden kannalta hyvin tärkeä.

LAUSE 2.2.6: *Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Jos $\lim x_n = a$ ja $\lim x_n = b$, niin $a = b$; toisin sanoen lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.*

Todistuksen juoni on seuraava: Valitaan epsiloniksi puolet lukujen a ja b välisestä etäisyydestä. Suurilla indeksin arvoilla lukujonon lukujen pitäisi olla alle epsilononin etäisyydellä sekä luvusta a että luvusta b , mikä on mahdotonta, jos $a \neq b$.

TODISTUS. Tehdään vastaoletus: $a \neq b$. Valitaan $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Koska $a \neq b$, niin $\varepsilon > 0$, joten on olemassa sellaiset $n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^a,$$

ja

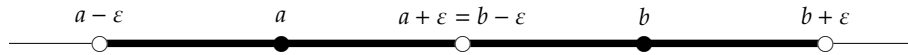
$$|x_n - b| < \varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^b.$$

Kun $n > \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$, niin luvun x_n pitäisi kuulua välille $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ja välille $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Tämä on mahdotonta, koska $\varepsilon < \frac{1}{2}|a - b|$, katso Kuva 2.5.

Vaihtoehtoinen tapa saada ristiriita on seuraava. Kun $n > \max\{n_\varepsilon^a, n_\varepsilon^b\}$, niin kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla saamme

$$2\varepsilon = |a - b| = |a - x_n - b + x_n| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

mikä johtaa ristiriitaan. \square



KUVA 2.5. Välit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ja $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ kun $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$.

Jos lukujonon kaikki jäsenet kuuluvat rajoitetulle välille, niin *lukujono on rajoitettu*. Seuraavan tuloksen mukaan suppeneva lukujono on rajoitettu.

LAUSE 2.2.7: *Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Tällöin on olemassa sellainen $M > 0$, että $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\} \subset [-M, M]$; toisin sanoen suppeneva lukujono on rajoitettu.*

TODISTUS. Olkoon (x_n) suppeneva lukujono, joka suppenee kohti lukua $x \in \mathbb{R}$. Nyt on olemassa $n' \in \mathbb{N}_0$, jolle $|x_n - x| < 1$ kaikilla $n > n'$. Tällöin

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

kaikilla $n > n'$. Olkoon m suurin luvuista $|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n'}|$. Tällöin kaikilla indeksin n arvoilla

$$|x_n| \leq \max\{1 + |x|, m\},$$

joten lukujonon kaikki luvut kuuluvat välille $[-\max\{1 + |x|, m\}, \max\{1 + |x|, m\}]$. Voimme siis valita $M = \max\{1 + |x|, m\}$. \square

Seuraavaksi esittelemme suppenevien jonojen yhdistämiseen liittyviä tuloksia.

LAUSE 2.2.8: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x . Olkoon (y_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua y . Tällöin*

- (a) *lukujono $(x_n + y_n)$ suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$,*
- (b) *kaikilla $r \in \mathbb{R}$ lukujono (rx_n) suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} (rx_n) = rx$,*
- (c) *lukujono $(x_n y_n)$ suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.*

Lisäksi, jos $y \neq 0$ ja $y_n \neq 0$ kaikilla n , niin

- (d) *lukujono $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.*

TODISTUS. (a) Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $n_\varepsilon^x, n_\varepsilon^y \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x - x_n| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^x,$$

ja

$$|y - y_n| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon^y.$$

Kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

kaikilla $n > \max\{n_\varepsilon^x, n_\varepsilon^y\}$.

Kohdat (b)–(d) ovat tehtävinä 2.2.17–2.2.19. Huomaa, että (d)-kohdassa oletuksesta $y \neq 0$ seuraa, että $y_n \neq 0$ kun n on riittävän suuri. Todistetaan tämä. Valitaan, että $\varepsilon = \frac{1}{2}|y| > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$, että $|y_n - y| < \varepsilon$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Jos $y > 0$, niin saamme $y_n > y - \varepsilon = y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y > 0$ kaikilla $n > n_\varepsilon$.

Jos $y < 0$, niin saamme $y_n < y + \varepsilon = y - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}y < 0$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Oletusta $y_n \neq 0$ kaikilla n tarvitaan, jotta lukujonon kaikki jäsenet ovat määriteltyjä. \square

Seuraava lause osoittaa, että epäyhtälö säilyy lukujonon raja-arvossa. Vaikka lauseen todistus on varsin helppo, niin itse tulos on tärkeä ja sitä tarvitaan useasti.

LAUSE 2.2.9: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x .*

- (a) *Olkoon M reaaliluku, jolla $x_n \leq M$ kaikilla indekseillä n . Tällöin pätee $x \leq M$.*
 (b) *Olkoon m reaaliluku, jolla $x_n \geq m$ kaikilla indekseillä n . Tällöin pätee $x \geq m$.*

TODISTUS. (a) Vastaoletuksella. Todistetaan Tehtävässä 2.2.24.

(b) Koska $\lim(x_n) = x$, niin $\lim(-x_n) = -x$ (Lause 2.2.8 (b)). Koska $-x_n \leq -m$, niin (a) kohdan perusteella $-x \leq -m$, josta väite seuraa. \square

KOROLLAARI 2.2.10: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x , ja olkoon (y_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua y .*

- (a) *Jos $x_n \leq y_n$ kaikilla n , niin $x \leq y$.*
 (b) *Jos $x_n \geq y_n$ kaikilla n , niin $x \geq y$.*

TODISTUS. (a) Tutkitaan lukujonoa $(x_n - y_n)$. Oletuksen perusteella $x_n - y_n \leq 0$ kaikilla n . Lauseen 2.2.9 mukaan $\lim(x_n - y_n) \leq 0$. Lauseen 2.2.8 perusteella $\lim(x_n - y_n) = \lim x_n - \lim y_n = x - y$. Yhdistämällä nämä saamme väitteen.

(b)-kohta seuraa (a)-kohdasta (kuten Lauseen 2.2.9 todistuksessa), tai se voidaan todistaa suoraan samalla tavalla kuin (a)-kohta. \square

Jos tiedämme, että lukujono (x_n) suppenee, niin miten käyttäytyy jono, joka muodostuu luvuista x_1, x_3, x_5, \dots . Entä miten käyttäytyy lukujono x_2, x_4, x_6, \dots ? Seuraavaksi määrittelimme yleisesti lukujonon osajonon ja esittelemme tuloksen liittyen osajonon suppenemiseen.

MÄÄRITELMÄ 2.2.11: *Olkoon (x_n) lukujono ja $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ jono lukuja $n_j \in \mathbb{N}_0$. Määritellään lukujono (y_k) asettamalla $y_j = x_{n_j}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}_0$. Lukujonoa (y_k) sanotaan jonon (x_n) osajonoksi.*

Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}, \dots$, joka on (x_n) arvoilla $x_n = 3 + \frac{1}{n}$. Nyt lukujono (y_n) , jolle $y_n = 3 + \frac{1}{2n}$, on lukujonon (x_n) osajono ja sen alkioita ovat $\frac{7}{2}, \frac{13}{4}, \frac{19}{6}, \dots$

LAUSE 2.2.12: *Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti lukua x . Tällöin sen jokainen osajono suppenee kohti lukua x .*

TODISTUS. Todistetaan Tehtävässä 2.2.25. \square

Lukujonolla voi olla suppeneva osajono, vaikka se hajaantuisi. Esimerkiksi jos $x_n = 1$, kun n on parillinen, ja $x_n = -1$, kun n on pariton, niin lukujono (x_n) hajaantuu. Lukujonolla on kuitenkin osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua -1 , ja osajonoja, jotka suppenevat kohti lukua 1 . Myöhemmin Lauseessa 2.3.4 osoitetaan, että jokaisella rajoitetulla lukujonolla on suppeneva osajono.

Tehtäviä lukuun 2.2.

2.2.13: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Etsi sellainen $k \in \mathbb{N}_1$, että $|x_n - 1| < 10^{-2}$ kaikilla $n > k$.

2.2.14: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \frac{n}{n^2+1}$. Etsi sellainen $k \in \mathbb{N}_1$, että $|x_n - 1| < 10^{-4}$ kaikilla $n > k$.

2.2.15: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \frac{2}{2^{n-1}}$. Osoita määritelmän perusteella, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 0.

2.2.16: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Osoita määritelmän perusteella, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 2.

2.2.17: Todista Lause 2.2.8(b).

2.2.18: Todista Lause 2.2.8(c).

2.2.19: Todista Lause 2.2.8(d).

2.2.20: Oletetaan, että $B_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että lukujono $(\sup B_n - \inf B_n)$ suppenee kohti nollaa.

2.2.21: (SUPPILOPERIAATE eli KURISTUSPERIAATE) Olkoot (x_n) , (y_n) ja (z_n) sellaisia lukujonoja, että $x_n \leq y_n \leq z_n$ kaikilla indekseillä n . Oletetaan, että lukujonot (x_n) ja (z_n) suppenevat ja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Osoita, että lukujono (y_n) suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

2.2.22: Olkoon (x_n) suppeneva lukujono, jonka raja-arvo on a . Määritellään lukujono (y_n) asettamalla $y_n = (-1)^n x_n$. Osoita, että jos $a = 0$, niin lukujono (y_n) suppenee. Miten tilanne muuttuu, jos $a \neq 0$?

2.2.23: Olkoon (x_n) lukujono, jolle

$$x_n = \frac{(2n-1)(n^2-2n)}{(n+1)(n^2+2)}.$$

Määritä Lauseen 2.2.8 avulla lukujonon raja-arvo.

2.2.24: Todista Lause 2.2.9(a).

2.2.25: Todista Lause 2.2.12.

2.3. Monotoninen lukujono ja rajatta kasvaminen

Tässä luvussa käsittelemme lukujonoja, joissa luvut ovat kasvavassa tai vähenevässä järjestyksessä. Tällaisilla lukujonoilla on aina äärellinen tai ääretön raja-arvo.

MÄÄRITELMÄ 2.3.1: Lukujono (x_n) on *kasvava*, jos $x_n \leq x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n . Lukujono on *aidosti kasvava*, jos $x_n < x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n . Lukujono (x_n) on *vähenevä*, jos $x_n \geq x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n . Lukujono on *aidosti vähenevä*, jos $x_n > x_{n+1}$ kaikilla indekseillä n . Lukujono on *monotoninen*, jos se on kasvava tai vähenevä. Lukujono on *aidosti monotoninen*, jos se on aidosti kasvava tai aidosti vähenevä.

Olkoon (x_n) kasvava ja suppeneva lukujono, jonka raja-arvo on x . Tällöin ajatteleamalla lukujonoa $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ saamme Lauseesta 2.2.9, että $x_n \leq x$ kaikilla n . Vastaavasti jos (y_n) on vähenevä ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, niin $y_n \geq y$ kaikilla n . Eli monotoninen ja suppeneva lukujono on rajoitettu. Seuraavassa tuloksessa osoitamme, että myös vastakkainen tulos pätee eli monotoninen ja rajoitettu lukujono suppenee.

LAUSE 2.3.2: (a) *Olkoon (x_n) , kasvava lukujono. Jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$, jolle $x_n \leq M$ kaikilla indekseillä n , niin lukujono suppenee. Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\} \leq M$.*
 (b) *Olkoon (x_n) , vähenevä lukujono. Jos on olemassa luku $m \in \mathbb{R}$, jolle $x_n \geq m$ kaikilla indekseillä n , niin lukujono suppenee. Tällöin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\} \geq m$.*

TODISTUS. (a) Olkoon \mathbb{N}_1 lukujonon määrittelyjoukko. Olkoon M reaaliluku, jolle $x_n \leq M$ kaikilla indekseillä $n \in \mathbb{N}_1$. Nyt joukko $\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$ on ylhäältä rajoitettu. Merkitään $s = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}_1\}$, tällöin $s \leq M$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 1.2.8 nojalla lukujonossa on olemassa luku x_{n_ε} , jolle

$$s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq s.$$

Koska lukujono on kasvava, niin

$$s - \varepsilon < x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq s \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon,$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$|x_n - s| < \varepsilon \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon.$$

Näin ollen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$.

(b)-kohta on Tehtävä 2.3.10. □

Lukujonon monotonisuutta voi usein tarkastella vertaamalla kahden peräkkäisen lukujonon alkion erotusta tai osamäärää. Olkoon (x_n) lukujono. Jos esimerkiksi ehto $x_{n+1} - x_n \geq 0$ tai $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ on voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, niin lukujono (x_n) on kasvava.

ESIMERKKI 2.3.3: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = \frac{n}{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että lukujono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

RATKAISU. Osoitamme aluksi, että lukujono on aidosti kasvava. Koska

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{n+1}{n+1+1}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1,$$

niin $x_n < x_{n+1}$ kaikilla n .

Lisäksi $0 < x_n < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$. Lukujono on siis kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Lauseen 2.3.2 nojalla lukujono suppenee ja $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_1\right\} \leq 1$.

Lopuksi osoitetaan, että $\sup\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}_1\right\} = 1$. Kun $n > m$, niin

$$\frac{n}{n+1} > \frac{m}{m+1} = \frac{m+1-1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} > 1 - \frac{1}{m}.$$

Joukon yläraja ei siis voi olla pienempi kuin 1. Koska 1 on joukon yläraja, niin se on supremum. △

Seuraavan lauseen todisti ensimmäisenä Bernard Bolzano vuonna 1817 Bolzanon lauseen avulla, myöhemmin Karl Weierstrass esitti sille vaihtoehdoisen todistuksen. Tämä lause osoittautuu myöhemmin tärkeäksi, kun osoitamme, että suljetulla välillä jatkuva funktio on rajoitettu (Lause 4.3.2) tai että jokainen suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva (Lause 4.4.5).

LAUSE 2.3.4: (BOLZANON–WEIERSTRASSIN LAUSE) *Olkoon (x_n) rajoitettu lukujono eli lukujono, jonka jäsenet kuuluvat rajoitetulle välille. Tällöin lukujonolla on suppeneva osajono.*

$$\begin{array}{c}
 x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_1-1}, \overset{\downarrow}{x_{n_1}}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1}, \overset{\downarrow}{x_{n_2}}, x_{n_2+1}, \dots \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{\{x_n : n \geq n_1 + 1\}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{\{x_n : n \geq 1\}}
 \end{array}$$

KUVA 2.6. Lukujonon (x_n) valinta Bolzanon–Weierstrassin lauseen todistuksessa: luku x_{n_1} on lähellä (enintään $\frac{1}{1}$ etäisyydellä) lukua $\sup\{x_n : n \geq 1\}$, luku x_{n_2} on lähellä (enintään $\frac{1}{2}$ etäisyydellä) lukua $\sup\{x_n : n \geq n_1 + 1\}$.

TODISTUS. Merkitään $a_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$. Koska lukujono on rajoitettu, niin $a_k \in \mathbb{R}$ kaikilla indekseillä k . Lisäksi lukujono (a_k) on vähenevä. Lauseen 2.3.2(b) nojalla lukujono (a_k) suppenee. Merkitään $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Huomaa, että a_k ei välttämättä ole lukujonon (x_n) jäsen.

Seuraavaksi valitaan osajono lukujonosta (x_n) . Supremumin ominaisuuksien nojalla (Lause 1.2.8) lukujonosta (x_n) löytyy jäsen x_{n_1} , jolle

$$x_{n_1} \geq a_1 - \frac{1}{1}.$$

Seuraavaksi lukujonosta (x_n) valitaan jäsen x_{n_2} , jolle $n_2 \geq n_1 + 1$ ja

$$x_{n_2} \geq a_{n_1+1} - \frac{1}{2}.$$

Oletetaan, että luvut x_{n_1}, \dots, x_{n_k} on valittu. Seuraavaksi lukujonosta (x_n) valitaan jäsen $x_{n_{k+1}}$, jolle $n_{k+1} \geq n_k + 1$ ja

$$x_{n_{k+1}} \geq a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1}.$$

Huomaa, että emme käyttäneet kaikkia lukuja a_k . Käytimme vain luvut a_1 ja a_{n_k+1} , $k = 1, 2, \dots$ Koska $a_k \rightarrow a$, niin myös $a_{n_k+1} \rightarrow a$.

Näin saadulle osajonolle (x_{n_k}) pätee, että

$$a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} \leq x_{n_{k+1}} \leq a_{n_k+1}.$$

Koska $a_{n_k+1} \rightarrow a$ ja $\frac{1}{k+1} \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$, niin saamme suppiloperiaatteella (Tehtävä 2.2.21), että $x_{n_k} \rightarrow a$ kun $k \rightarrow \infty$. \square

Määrittelemme seuraavaksi Neperin luvun kasvavien lukujonojen avulla.

ESIMERKKI 2.3.5: Määritellään jono (x_n) asettamalla

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Osoita, että jono on aidosti kasvava ja ylhäältä rajoitettu.

RATKAISU. Osoitetaan ensin, että jono (x_n) on aidosti kasvava tarkastelemalla osamäärää x_{n+1}/x_n . Nyt saamme

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Käytetään seuraavaksi Bernoullin epäyhtälöä (Esimerkki 1.4.5) $(1+x)^m > 1+mx$ arvoilla $x = -\frac{1}{(n+1)^2}$ ja $m = n+1$. Saamme

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} \frac{n+1}{n} = 1,$$

mikä osoittaa, että jono (x_n) on aidosti kasvava.

Osoitetaan seuraavaksi kahdella eri tavalla, että jono on ylhäältä rajoitettu.

Tapa 1. Ylempänä esitettyä päättelyä käyttämällä voimme soittaa, että lukujono $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ on aidosti kasvava, katso Tehtävä 2.3.14. Koska

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} < 1,$$

niin käyttämällä tätä ja lukujonon $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ kasvavuutta saamme

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

kaikilla n .

Tapa 2. Binomikaavan (Lemman 1.4.9) mukaan

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}.$$

Arvioidaan summan termiä,

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Käyttäen tätä arviota ja geometrisen sarjan osasummakaavaa (Lause 1.4.10) saamme

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Jono on siis rajoitettu. △

Lauseen 2.3.2 perusteella edellisen tehtävän lukujono suppenee. Sen avulla määrittelemme Neperin luvun e , joka on saanut nimensä skotlantilaisen matemaatikko John Napierin (1550–1617) mukaan. Napier tutki logaritmeja ja keksi luonnollisen logaritmin vuonna 1614. Napier ei kuitenkaan keksinyt lukua e , vaan sen keksi Jacob Bernoulli vuonna 1683.

MÄÄRITELMÄ 2.3.6: Lukujonon $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ raja-arvoa kutsutaan *Neperin luvuksi* e .

Koska lukujono $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ on kasvava, niin $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ kaikilla n . Toisaalta Tehtävistä 2.3.14 ja 2.3.15 saamme $e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ kaikilla n . Saamme näistä arvion luvun e suuruudelle. Esimerkiksi sijoittamalla $n = 10$ saamme $2,59 < \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{-10} < 2,87$ ja sijoittamalla $n = 10000$ saamme $2,7181 < e < 2,7185$. Neperin lukua käytetään luonnollisen logaritmin kantalukuna, katso Luku 6.2. Liitteessä D esitämme vaihtoehdoisen tavan määrittellä Neperin luku e sarjana, jolloin myös osoitamme luvun e olevan irrationaalinen.

Seuraavaksi siirrymme lukujonoihin, jotka lähestyvät positiivista tai negatiivista ääretöntä.

MÄÄRITELMÄ 2.3.7: Lukujono (x_n) *kasvaa rajatta*, jos jokaista reaalilukua m kohti on olemassa luku sellainen $n_m \in \mathbb{N}_0$, että

$$x_n > m \text{ kaikilla } n > n_m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ tai } x_n \rightarrow \infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Lukujono (x_n) *vähenee rajatta*, jos jokaista reaalilukua m kohti on olemassa luku sellainen $n_m \in \mathbb{N}_0$, että

$$x_n < m \text{ kaikilla } n > n_m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \text{ tai } x_n \rightarrow -\infty, \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

LEMMA 2.3.8: Olkoon (x_n) lukujono, joka kasvaa tai vähenee rajatta. Tällöin se hajaantuu.

TODISTUS. Käsittelemme vain tapausta, jossa (x_n) on kasvava, toinen tapaus on samanlainen.

Tehdään vastaoletus, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua x . Koska lukujono kasvaa rajatta, on olemassa sellainen luku $m \in \mathbb{N}_0$, että $x_n > x + 1$ kaikilla $n > m$. Tällöin kaikilla $n > m$ pätee $|x_n - x| > 1$, joten lukujono ei suppene kohti lukua x . Lukujono siis hajaantuu. \square

LAUSE 2.3.9: (a) Olkoon (x_n) kasvava lukujono. Tällöin se joko suppenee tai kasvaa rajatta.
(b) Olkoon (x_n) vähenevä lukujono. Tällöin se joko suppenee tai vähenee rajatta.

TODISTUS. Tehtävä 2.3.16. \square

Tehtäviä lukuun 2.3.

2.3.10: Tässä esimerkissä Lauseen 2.3.2(b) todistetaan kahdella eri tavalla.

- (a) Lue lauseen (a)-kohdan todistus ja muuta todistus lauseen (b)-kohdan tapaukseen.
(b) Todista lauseen (b)-kohta käyttäen lauseen (a)-kohtaa.

2.3.11: Osoita, että lukujono $\left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)$ on vähenevä ja määritä sen raja-arvo.

2.3.12: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_1 = 3$ ja $x_n = \frac{n}{n-1}$ kun $n \geq 2$. Osoita, että lukujono (x_n) on vähenevä ja määritä sen raja-arvo.

2.3.13: Bolzanon–Weierstrassin lauseen 2.3.4 todistuksessa käytettiin joukkojen $\{x_n : n \geq k\}$ supremumeja. Muuta todistusta niin, että se käyttää samojen joukkojen infimumeja.

2.3.14: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että lukujono $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ on kasvava kaikilla $n > |x|$.

2.3.15: Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että lukujonon $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$ raja-arvo on $\frac{1}{e}$.

2.3.16: Todista Lause 2.3.9.

2.3.17: Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$. Osoita, että lukujono (x_n) hajaantuu.

2.4. Cauchyn yleinen suppenemisehto *

Tarkastelemme tässä luvussa tuloksia, joiden avulla voimme tutkia lukujonon käyttäytymistä. Seuraava lause antaa meille mahdollisuuden osoittaa helposti, että lukujono hajaantuu.

LAUSE 2.4.1: Olkoon (x_n) suppeneva lukujono. Tällöin jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että kun $n > n_\varepsilon$, niin

$$|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.

TODISTUS. Merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska lukujono (x_n) suppenee, niin on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ kun } n > n_\varepsilon.$$

Olkoon $n > n_\varepsilon$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$ saadaan kolmioepäyhtälön (Lause 2.1.2) avulla

$$|x_n - x_{n+k}| = |x_n - a + a - x_{n+k}| \leq |x_n - a| + |a - x_{n+k}| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \quad \square$$

ESIMERKKI 2.4.2: Osoita, että lukujono $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$ hajaantuu.

RATKAISU. Lukujonon peräkkäisten jäsenten erotuksen itseisarvo on aina yksi tai kaksi. Lauseen 2.4.1 ehdot eivät toteudu, kun valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ja $k = 1$. Siis jono hajaantuu. \triangle

LEMMA 2.4.3: *Olkoon $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}_1$, välejä, joille*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}_1$$

ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Tällöin leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ sisältää täsmälleen yhden luvun, toisin sanoen on olemassa täsmälleen yksi luku, joka kuuluu kaikkiin väleihin $[a_n, b_n]$.

Lause ei päde avoimille väleille. Esimerkiksi välit $(0, \frac{1}{n})$, kaikilla $n \in \mathbb{N}_1$, ovat sisäkkäisiä ja $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} - 0) = 0$, mutta $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$.

TODISTUS. Lukujono (a_n) on kasvava ja lukujono (b_n) on vähenevä, ja lisäksi $a_n \leq b_k$ kaikilla $n, k \in \mathbb{N}_1$. Erityisesti siis pätee, että $a_n \leq b_1$ kaikilla n . Lauseen 2.3.2 nojalla lukujono (a_n) suppenee, olkoon a sen raja-arvo. Vastaavalla tavalla saadaan, että lukujono (b_n) suppenee, olkoon b sen raja-arvo. Koska (a_n) on kasvava, niin $a \geq a_n$ kaikilla indekseillä n , ja koska (b_n) on vähenevä, niin $b \leq b_n$ kaikilla indekseillä n . Koska $a_n \leq b_n$ kaikilla n , niin $a \leq b$ (Korollaari 2.2.10). Tällöin pätee

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \rightarrow 0,$$

joten $a = b$.

Koska $a_n \leq a = b \leq b_n$ kaikilla n , niin $\{a\} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Olkoon $x \neq a$. Koska $b_n - a_n \rightarrow 0$ ja $a \in [a_n, b_n]$, niin $x \notin [a_n, b_n]$, kun n on riittävän suuri. Saamme $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. \square

Cauchyn yleinen suppenemisehto on peräisin ranskalaiselta Augustin-Louis Cauchylta (1789–1857). Bolzano oli tehnyt saman havainnon, mutta hänen tuotantonsa jäi pitkään laajemmalti tuntemattomaksi.

LAUSE 2.4.4: (CAUCHYN YLEINEN SUPPENEMISEHTO) *Lukujono (x_n) suppenee, jos ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ siten, että*

$$|x_n - x_{n+k}| < \varepsilon \text{ kaikilla } n > n_\varepsilon \text{ ja kaikilla } k \in \mathbb{N}_0.$$

TODISTUS. Oletetaan ensin, että lukujono (x_n) suppenee. Ehto seuraa Lauseesta 2.4.1.

Oletetaan sitten, että lauseen ehto on voimassa, ja osoitetaan, että lukujono suppenee. Valitaan $\varepsilon = 1$. Tällöin ehdon mukaan on olemassa sellainen luku n_1 ,

että $|x_n - x_{n+k}| < 1$ kaikilla $n > n_1$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Saamme $x_n \in (x_{n_1+1}-1, x_{n_1+1}+1)$ kaikilla $n > n_1$. Lisäksi joukossa $\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|\}$ on suurin alkio, jota merkitään m . Kaikki lukujonon (x_n) luvut kuuluvat siis välille $(-|x_{n_1+1}|-1-m, |x_{n_1+1}|+1+m)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään

$$\begin{aligned} s_1 &= \sup\{x_1, x_2, x_3, \dots\}, & p_1 &= \inf\{x_1, x_2, x_3, \dots\}; \\ s_2 &= \sup\{x_2, x_3, x_4, \dots\}, & p_2 &= \inf\{x_2, x_3, x_4, \dots\}; \\ &\vdots & &\vdots \\ s_n &= \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}, & p_n &= \inf\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}; \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Koska lukujonon (x_n) kaikki luvut kuuluvat rajoitetulle välille, kaikki edellä määritellyt supremumit ja infimumit ovat reaalityyppisiä. Tällöin lukujono (s_n) on vähenevä ja lukujono (p_n) on kasvava. Lisäksi kaikilla indekseillä n pätee $s_n \geq p_n$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - p_n) = 0$. Oletuksen mukaan on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$ siten, että kaikilla $n > n_\varepsilon$ ja kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$ pätee

$$|x_n - x_{n+k}| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Lauseen 1.2.8 perusteella on olemassa lukujonon jäsenet x_{k_n} ja $x_{k'_n}$, joille pätee

$$|s_n - x_{k_n}| < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ ja } |p_n - x_{k'_n}| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Kun $n > n_\varepsilon$, niin $k_n, k'_n \geq n > n_\varepsilon$. Tällöin saadaan kolmioepäyhtälöllä (Lause 2.1.2)

$$\begin{aligned} |s_n - p_n| &= |s_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x_{k'_n} + x_{k'_n} - p_n| \\ &\leq |s_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x_{k'_n}| + |x_{k'_n} - p_n| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

kaikille $n > n_\varepsilon$, joten $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - p_n) = 0$.

Lemman 2.4.3 mukaan väleillä $[p_n, s_n]$ on täsmälleen yksi yhteinen luku, olkoon tämä luku x . Osoitetaan, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua x . Koska $x, x_k \in [p_n, s_n]$ kaikilla $k > n$, niin $|x - x_k| \leq s_n - p_n$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - p_n) = 0$, niin on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_1$ siten, että $0 \leq s_n - p_n < \varepsilon$ kaikilla $n > n_\varepsilon$. Tällöin $|x - x_k| \leq s_n - p_n < \varepsilon$ kaikilla $k > n > n_\varepsilon$ eli kaikilla $k > n_\varepsilon + 1$. \square

Tehtäviä lukuun 2.4.

2.4.5: Osoita, että lukujono $(2, 2, 5, 2, 2, 5, \dots)$ hajaantuu.

2.4.6: Tutki, suppeneeko lukujono $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, \dots)$.

2.4.7: Määritellään lukujono (x_n) asettamalla $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Osoita, että lukujono hajaantuu. Sisältääkö lukujono suppenevan osajonon?

2.4.8: Olkoon (x_n) lukujono, joka toteuttaa ehdon $|x_n - x_{n+1}| < 2^{-n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita Cauchyn yleisen suppeneemisehdon avulla, että lukujono (x_n) suppenee.

Kirjallisuutta

- [1] Adams, Robert A. (2006). *Calculus: A Complete Course* (6th edition). Toronto, Canada: Pearson Education Canada.
- [2] Anderson, Glen D., Vamanamurthy, Mavina K., & Vuorinen, Matti K. (1997). *Conformal invariants, inequalities and quasiconformal mappings*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Anderson, Glen D., Vamanamurthy, Mavina K., & Vuorinen, Matti K. (2006). Monotonicity rules in calculus. *Amer. Math. Monthly*, 113(9), 805–816.
- [4] Apostol, Tom M. (1957). *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- [5] Apostol, Tom M. (1961). *Calculus, Volume I* (1st Edition). New York: Blaisdell.
- [6] Boyer, Carl B. (2000). *Tieteiden kuningatar - Matematiikan historia, osat I ja II*. Art House Oy.
- [7] Denlinger, Charles G. (2011). *Elements of Real Analysis*. Jones and Barlett Publisher.
- [8] Duren, Peter (2012). *Invitation to Classical Analysis*. Pure and Applied Undergraduate Texts, 17. Providence, RI: American Mathematical Society,
- [9] Gelbaum, Bernard R., & Olmsted, John M. H. (1964). *Counterexamples in Analysis*. San Francisco: Holden-Day, Inc.
- [10] Hurri-Syrjänen, Ritva (1999). *Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1*. Luentomuistiinpanot, syksy 1999, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
- [11] Hykšová, Magdalena (2001). Bolzano's inheritance research in Bohemia. Teoksessa *Mathematics Throughout the Ages* (Holbaek, 1999/Brno, 2000) (s. 67–91). Děj. Mat./Hist. Math., 17. Prometheus Prague.
- [12] Kankaanpää, Jouni (2001). *Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2*. Luentomuistiinpanot, kevät 2001, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
- [13] Kilpeläinen, Tero (2002). *Analyysi 1*. Luentomuistiinpanoja vuosilta 2000–2002, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- [14] Kilpeläinen, Tero (2003). *Analyysi 2*. Luentomuistiinpanoja vuosilta 2001 ja 2003, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- [15] Kilpeläinen, Tero (2005). *Analyysi 3*. Luentomuistiinpanoja syksyiltä 2005, Jyväskylän yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos.
- [16] Lehtinen, Matti (2014). Matematiikan historia. *Matematiikkalehti Solmu*. <http://solmu.math.helsinki.fi>.
- [17] Martio, Olli, & Sarvas, Jukka (1982). Tavalliset differentiaaliyhtälöt (2. painos). Helsinki: Gaudeamus.
- [18] McCarthy, John (1953). An everywhere continuous nowhere differentiable function. *Amer. Math. Monthly*, 60, 709.
- [19] Merikoski, Jorma, Halmetoja, Markku, & Tossavainen, Timo (2004). *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*. WSOY.
- [20] Myrberg, Lauri (1981). *Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 1* (1.–3. painos). Helsinki: Kirjayhtymä.
- [21] Myrberg, Lauri (1986). *Differentiaali- ja integraalilaskenta, osa 2* (1.–3. painos). Helsinki: Kirjayhtymä.
- [22] Niculescu, Constantin P., & Persson, Lars-Erik (2006). *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23. New York: Springer.
- [23] Niven, Ivan (1956). *Irrational numbers*. The Carus Mathematical Monographs, No. 11. The Mathematical Association of America. New York, N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.
- [24] O'Connor, John J., & Robertson, Edmund F. (2023). *MacTutor History of Mathematics* (University of St Andrews, Scotland). <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>.

- [25] Olmsted, John M. H. (1961). *Advanced Calculus*. New York: Appleton-Century-Crofts, Inc.
- [26] Rudin, Walter (1964). *Principles of Mathematical Analysis* (2nd Edition). Tokyo: McGraw-Hill.
- [27] Väisälä, Jussi (1985). *Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1*. Luentomuistiinpanot vuodelta 1985, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
- [28] Väisälä, Jussi (1978). *Differentiaali- ja integraalilaskenta I.2*. Luentomuistiinpanot vuodelta 1978, Helsingin yliopisto, matematiikan laitos.
- [29] Väisälä, Jussi (2002). *Topologia I* (2. korjattu painos). Helsinki: Limes ry.

Hakemisto

- Abel, Niels Henrik, 318
Abelin lause, 318
Aidosti konkaavi funktio, 123
Aidosti konvekksi funktio, 123
Alaintegraali, 162
Alasumma, 161
Aliharmoninen sarja, 295
Alkukuva, 31
Alternoiva sarja, 301
Analyysin peruslause, 191, 194
Aritmeettinen sarja, 283
Arkhimedeen lause, 344
Arkusfunktio
 kosini, 147
 sini, 146
 tangenti, 148
Aste, polynomin, 33

Barrow, Isaac, 191
Bernoulli, Jacob, 26, 53
Bernoulli, Johann, 148
Bernoullin epäyhtälö, 26
Bhāskara II, 110
bi-Lipschitz-jatkuvuus, 119
Bijektio, 31
Binomikaava, 358
Binomikerroin, 27
Binomisarja, 358
Bolzano, Bernard, 51, 55, 80
Bolzanon lause, 80
 korollaari, 82
Bolzanon–Weierstrassin lause, 51
Borel, Félix Edouard Justin Émile, 87

Cauchy, Augustin-Louis, 55, 58, 80, 111, 155, 267, 290, 297
Cauchyn yleinen suppenemisehto
 lukujono, 55
 sarja, 290
Cauchyn jäännöstermimuoto, 267
Cauchyn väliarvolause, 155

Darboux, Gaston, 163
de l’Hôpital, Guillaume, 148
de l’Hôpitalin sääntö, 149

Derivaatta, 97
 n :nnen kertaluvun, 127
 oikeanpuoleinen, 99
 toisen kertaluvun, 127
 vasemmanpuoleinen, 99
Differentialihajotelma, 105
Differentialilaskennan väliarvolause, 111
Dini, Ulisse, 253
Dinin konvergenssilause, 253
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 87

Ehdollinen suppeneminen, sarjan, 308
Ei-negatiiviterminen sarja, 292
Ei-positiiviterminen sarja, 292
Ekspontenttifunktio, 136
 derivoituvuus, 139
 jatkuvuus, 138
 käänteisfunktio, 140
Ekspontenttifunktio, yleinen, 142
Epäoleellinen integraali, 221, 224, 232
 itseinen suppeneminen, 243
 tyyppi I, 221
 tyyppi II, 224
Erotus, sarjojen, 289
Erotusosamäärä, 97

Funktio, 30
 n kertaa derivoituva, 127
 aidosti kasvava, 67
 aidosti konkaavi, 123
 aidosti konvekksi, 123
 aidosti monotoninen, 67
 aidosti vähenevä, 67
 alkukuva, 31
 arvojoukko, 30
 bijektio, 31
 injektio, 31
 jatkuva, 73, 76
 jatkuva pisteessä, 73
 jatkuvasti derivoituva, 131, 264
 kaksi kertaa derivoituva, 127
 kasvava, 67
 konkaavi, 123
 konvekksi, 123
 kuva, 31

- lähtöjoukko, 30
 maalijoukko, 30
 monotoninen, 67
 määrittelyjoukko, 30
 nollakohta, 33
 oikealta jatkuva, 75
 paloittain jatkuva, 79
 polynomi, 33
 rationaalifunktio, 33
 reaaliarvoinen, 30
 reaalinuuttujan, 30
 surjektio, 31
 vasemmalta jatkuva, 75
 vähenevä, 67
 yhdistetty, 32
 Funktiojono, 249
 pisteittäinen suppeneminen, 249
 rajafunktio, 249
 tasainen suppeneminen, 249
 Funktion raja-arvo, 58
 oikeanpuoleinen, 64
 toispuoleinen, 64
 vasemmanpuoleinen, 64
 äärettömässä, 66
 ääretön, 62
 Gauss, Carl Friedrich, 163
 Geometrinen sarja, 284
 Gregory, James, 191, 261
 Haarukointi, 86
 Hajaantuminen
 integraali, 222, 224
 lukujono, 44
 sarja, 282
 Harmoninen sarja, 295
 Heine, Heinrich Eduard, 87
 Heinen–Borelin lause, 87
 Hölderin epäyhtälö, 292
 Induktio, 24
 aksioma, 24
 alkuaskel, 24
 induktioaskel, 24
 Infimum, 19
 Injektio, 31
 Integraali, 163
 epäoleellinen, 221, 224
 määräämätön, 186
 Integraalifunktio, 186
 Integraalikeskiarvo, 198
 Integraalilaskennan peruslause, 114
 Integraalilaskennan väliarvolause, 199
 yleistetty, 200
 Integraalitestit sarjalle, 293
 Integroituvuus, 163
 Irrationaaliluvut, 16
 Itseinen hajaantuminen
 integraalin, 243
 sarjan, 304
 Itseinen suppeneminen
 integraalin, 243
 sarjan, 304
 Itseisarvo, 41
 Jatkuvuus, 73, 76
 bi-Lipschitz, 119
 Lipschitz, 116
 oikealta, 75
 tasainen, 91
 vasemmalta, 75
 Joukko, 342
 aito osajoukko, 342
 alhaalta rajoitettu, 18
 erotus, 342
 komplementti, 342
 leikkaus, 342
 osajoukko, 342
 tyhjä joukko, 342
 yhdiste, 342
 ylhäältä rajoitettu, 18
 Juurifunktio, 84
 derivoituvuus, 108
 jatkuvuus, 84
 Juuritesti sarjalle, 299
 Jäännöstermi
 sarja, 282
 Taylorin polynomi, 264, 265, 267
 Karteesinen tulo, 29
 Kehityskeskus, 317
 Keskus, 317
 Ketjusääntö, 106
 Kokonaisluvut, 15
 Kolmioepäyhtälö, 42
 Konkaavi funktio, 123
 Konvekssi funktio, 123
 Kosini, 34
 analyttinen määritelmä, 337
 derivoituvuus, 105
 jatkuvuus, 85
 käänteisfunktio, 147
 Kuristusperiaate, 49, 63
 Kuva, 31
 Käänne piste, 128
 Käänteisrelaatio, 30
 l'Hôpitalin sääntö, 149
 Lagrange, Joseph-Louis, 80, 267
 Lagrangen jäännöstermimuoto, 267
 Lebesgue, Henri Léon, 118, 163
 Leibniz, Gottfried Wilhelm von, 97, 191,
 302
 Leibnizin testi, 302

- Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund, 116
 Lipschitz-jatkuvuus, 116
 Lipschitz-vakio, 116
 Logaritmifunktio (luonnollinen), 140, 206
 derivoituvuus, 140
 jatkuvuus, 140
 Taylorin sarja, 336
 Logaritmifunktio, yleinen, 143
 Lokaali maksimikohta, 120
 Lokaali minimikohta, 120
 Lukujono, 44
 hajaantuva, 44
 kasvava, 49
 monotoninen, 49
 osajono, 48
 raja-arvo, 44
 rajatta kasvava, 53
 rajatta vähenevä, 53
 rajoitettu, 47
 suppeneva, 44
 vähenevä, 49
 Luonnolliset luvut, 15

 Maclaurin, Colin, 261
 Maclaurinin polynomi, 263
 Majoranttiperiaate
 integraalille, 238
 sarjalle, 295
 McCarthyn funktio, 355
 Min-max-lause, 89
 Minoranttiperiaate
 integraalille, 238
 sarjalle, 295
 Määräämätön integraali, 186

 Napier, John, 53
 Negatiiviterminen sarja, 292
 Neperin luku e , 53, 354
 Newton, Isaac, 97, 131, 191

 Oikeanpuoleinen derivaatta, 99
 Oresme, Nicole, 293
 Osajono, 48
 Osamurtokehitemä, 214
 Osasumma, 281
 Osasummatesti sarjalle, 292
 Osittaisintegrointi, 212

 p -sarja, 295
 Paloittain jatkuva, 79
 Parameshvara, 111
 Pascalin kolmio, 361
 Pascalin, Blaise, 361
 Peite, 87
 Perusjono, 347
 ekvivalentti, 348
 nollajono, 348

 π , 34, 340, 353
 Pincherle, Salvatore, 87
 Pisteittäinen suppeneminen
 funktiojonon, 249
 sarjan, 326
 Poincaré, Henri, 195
 Poincarén epäyhtälö, 195
 Polku, 201
 jatkuvasti derivoituva, 202
 pituus, 202
 Polynomi, 33
 aste, 33
 jatkuvuus, 78
 Porrasfunktio, 169
 Positiiviterminen sarja, 292
 Potenssifunktio, 25, 84, 143
 derivoituvuus, 103, 108, 144
 jatkuvuus, 78, 85, 144
 yleinen, 143
 Potenssisarja, 317
 kerroin, 317
 suppenemissäde, 320
 suppenemisväli, 320
 yksikäsitteisyys, 331
 Pääarvointegraali, 234

 Rademacher, Hans, 118
 Rademacherin lause, 118
 Raja-arvo, funktio, 58
 oikeanpuoleinen, 64
 toispuoleinen, 64
 vasemmanpuoleinen, 64
 äärettömässä, 66
 ääretön, 62
 Raja-arvo, lukujonon, 44
 ääretön, 53
 Raja-arvotesti, 287
 Rajafunktio, 249
 Rajoitettu lukujono, 47
 Raphson, Joseph, 131
 Rationaalifunktio, 33
 Rationaaliluvut, 15
 tiheys, 345
 Reaaliluku, 15, 348
 ei-negatiivinen, 17
 ei-positiivinen, 17
 erotus, 16
 järjestysaksioomat, 17, 349
 kertolasku, 15
 kunta-aksioomat, 15, 348
 negatiivinen, 17
 osamäärä, 16
 positiivinen, 17, 349
 summa, 15, 348
 tulo, 15, 348
 täydellisyysaksiooma, 19, 351

- yhtenlasku, 15
- Relaatio, 29
- Riemann, Bernhard, 163
- Riemannin integraali, 163
- Riemannin integroituvuusehto, 166
- Riemannin summa, 173
- Riemannin uudelleenjärjestämislause, 313
- Rolle, Michel, 110
- Rollen lause, 110
- Ryhmitelty sarja, 306
- Sarja, 281
 - aliharmoninen, 295
 - alternoiva, 301
 - aritmeettinen, 283
 - ehdollisesti suppeneva, 308
 - ei-negatiiviterminen, 292
 - ei-positiiviterminen, 292
 - geometrinen, 284
 - hajaantuva, 282
 - harmoninen, 295
 - itseisesti hajaantuva, 304
 - itseisesti suppeneva, 304
 - jännöstermi, 282
 - negatiiviterminen, 292
 - osasumma, 281
 - p -sarja, 295
 - positiiviterminen, 292
 - potenssisarja, 317
 - ryhmitelty, 306
 - summa, 282
 - suppeneva, 282
 - teleskooppisarja, 283
 - termi, 281
 - uudelleenjärjestetty, 312
 - vakiosarja, 282
 - vuorotteleva, 301
 - yliharmoninen, 295
- Schwarzin epäyhtälö, 183
- Sini, 34
 - analyyttinen määritelmä, 337
 - derivoituvuus, 105
 - jatkuvuus, 85
 - käänteisfunktio, 146
 - Taylorin sarja, 333
- Stokes, George, 249
- Suhdetesti sarjalle, 298
- Summa, sarjojen, 288
- Suppeneminen
 - integraali, 221, 224, 232
 - lukujono, 44
 - sarja, 282
- Suppenemiskeskus, 317
- Suppenemissäde, 320
- Suppenemistesti sarjalle
 - integraalitest, 293
 - juuritest, 299
 - Leibnizin testi, 302
 - osasummatest, 292
 - raja-arvotesti, 287
 - suhdetesti, 298
 - vertailutesti, 296
- Suppenemisväli, 320
- Suppiloperiaate, 49, 63
- Supremum, 19
- Surjektio, 31
- Tangentti, 37
 - käänteisfunktio, 148
- Tasainen jatkuvuus, 91, 167
- Tasainen suppeneminen
 - funktiojonon, 249
 - sarjan, 327
 - Weierstrassin M -testi, 327
- Taylor, Brook, 261
- Taylorin kaava, 264
- Taylorin kehitelmä, 265
 - yksikäsitteisyys, 271
- Taylorin polynomi, 263
- Taylorin sarja, 332
 - binomisarja, 358
 - yksikäsitteisyys, 336
- Teleskooppisarja, 283
- Tihennetty jako, 161
- Uudelleenjärjestetty sarja, 312
- Vakiosarja, 282
- Vasemmanpuoleinen derivaatta, 99
- Vertailutesti
 - integraalille, 241
 - sarjalle, 296
- Vuorotteleva sarja, 301
- Väli, 30
- Väliarvolause, 111
 - Cauchyn, 155
 - yleistetty, 149
- Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm, 51, 58, 87, 89, 327
- Weierstrassin M -testi, 327
- Weierstrassin min-max-lause, 89
- Yhdistetty funktio, 32
- Yleinen eksponenttifunktio, 142
- Yleinen logaritmfunktio, 143
- Yleinen potenssifunktio, 143
- Yleistetty int.laskennan väliarvolause, 200
- Yleistetty väliarvolause, 149
- Yliharmoninen sarja, 295
- Yläintegraali, 162
- Yläsumma, 161
- Youngin epäyhtälö, 183, 292

Matemaattisia merkintöjä

$\{a, b, c\}$	joukko, jonka alkiot ovat a, b ja c
\mathbb{N}_1	luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0	ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Z}	kokonaislukujen joukko $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{Q}	rationaalilukujen joukko $\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$
\mathbb{R}	reaalilukujen joukko, kts. Luku 1.1
\emptyset	tyhjä joukko
$x \in A$	alkio x kuuluu joukkoon A
$x \notin A$	alkio x ei kuulu joukkoon A
$A \subset B$	joukko A on joukon B osajoukko; jos $x \in A$, niin $x \in B$
$A = B$	joukot A ja B ovat samat; $A \subset B$ ja $B \subset A$
$A \neq B$	joukot A ja B eivät ole samat
$A \cup B$	joukkojen A ja B yhdiste $\{x : x \in A \text{ tai } x \in B\}$
$A \cap B$	joukkojen A ja B leikkaus $\{x : x \in A \text{ ja } x \in B\}$
$A \setminus B$	joukkojen A ja B erotus $\{x : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$
(a, b)	avoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b]$	suljettu väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$	puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
$[a, b)$	puoliavoin väli $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
$\min A$	reaalilukujoukon A minimi eli pienin luku
$\max A$	reaalilukujoukon A maksimi eli suurin luku
$\inf A$	reaalilukujoukon A infimum eli suurin alaraja, kts. Määritelmä 1.2.2
$\sup A$	reaalilukujoukon A supremum eli pienin yläraja, kts. Määritelmä 1.2.3
$ x $	reaaliluvun x itseisarvo, kts. Määritelmä 2.1.1
$n!$	luvun $n \in \mathbb{N}_0$ kertoma $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$
$f: A \rightarrow B$	funktio f joukosta A joukkoon B , kts. Määritelmä 1.5.1
$g \circ f$	yhdistetty funktio; $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, kts. Määritelmä 1.5.10
$D_x f, f'$	funktion f derivaattafunktio, kts. Määritelmät 5.1.1 ja 5.1.13
$\int_a^b f(x) dx$	funktion f Riemannin integraali välillä $[a, b]$, kts. Määritelmä 7.1.6
$\int_a^b f(x)$	sijoitus $f(b) - f(a)$
$\sum_{k=1}^n x_k$	reaalilukujen x_1, \dots, x_n summa
$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$	reaalilukujen x_1, x_2, x_3, \dots muodostama sarja, kts. Määritelmä 13.1.1